

Казанский инновационный университет имени В. Г. Тимирязова (ИЭУП)

# НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Сборник задач

Казань  
Познание  
2019

**УДК 51(076.1)**

**ББК 22.1я72**

**НЗ6**

*Печатается по решению секции  
естественнонаучных дисциплин учебно-методического совета  
Казанского инновационного университета им. В. Г. Тимирязова (ИЭУП)*

**Рецензенты:**

доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Казанского инновационного университета **С. И. Филиппов**;  
кандидат педагогических наук, доцент кафедры высшей математики и информационных технологий Набережно-Челнинского филиала Казанского инновационного университета **Ю. Н. Бурханова**

**НЗ6** Начала математического анализа : сборник задач / Л. Н. Гаврилова, З. Ш. Аглямова, Е. К. Митина, Т. Н. Кожеманова. – Казань : Изд-во «Познание» Казанского инновационного университета имени В. Г. Тимирязова (ИЭУП), 2019. – 32 с.

Сборник задач по началам математического анализа содержит задачи раздела «Начала математического анализа» в рамках дисциплины «Математика» общеобразовательного цикла для студентов, обучающихся по различным специальностям колледжа.

Данный сборник задач может быть использован для проведения практических занятий и организации самостоятельной работы студентов при изучении дисциплины «Математика» общеобразовательного цикла.

Отзывы, замечания и предложения по сборнику можно выслать по электронному адресу кафедры Высшей математики КИУ: [kaf23@ieml.ru](mailto:kaf23@ieml.ru).

**УДК 51(076.1)**

**ББК 22.1я72**

© Казанский инновационный университет  
имени В. Г. Тимирязова (ИЭУП), 2019

© Гаврилова Л. Н., 2019

© Аглямова З. Ш., 2019

© Митина Е.К., 2019

© Кожеманова Т.Н., 2019

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
ЧИСЛОВАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ.....	6
ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ.....	10
ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ.....	21
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	28
ПРИЛОЖЕНИЕ.....	29

## ВВЕДЕНИЕ

Сборник задач по началам математического анализа предназначен для проведения практических занятий и организации самостоятельной работы студентов различных специальностей колледжа при изучении дисциплины «Математика» общеобразовательного цикла. Данное пособие разработано в соответствии с рабочими программами дисциплины «Математика» общеобразовательного цикла, составленными на основе требований федеральных государственных образовательных стандартов среднего профессионального образования.

Пособие содержит задачи различного уровня сложности по следующим темам дисциплины «Математика» общеобразовательного цикла: «Числовая последовательность», «Производная функции», «Первообразная и интеграл». В приложении приводится краткий справочный материал по началам математического анализа.

Применение настоящего пособия при изучении дисциплины «Математика» общеобразовательного цикла должно способствовать тому, что будут достигнуты следующие

личностные результаты освоения:

– готовность и способность к образованию, в том числе самообразованию, на протяжении всей жизни; сознательное отношение к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной и общественной деятельности;

метапредметные результаты освоения:

– владение навыками познавательной, учебно-исследовательской и проектной деятельности, навыками разрешения проблем; способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания;

– готовность и способность к самостоятельной информационно-познавательной деятельности, владение навыками получения необходимой информации из словарей разных типов, умение ориентироваться в различных источниках информации, критически оценивать и интерпретировать информацию, получаемую из различных источников;

предметные результаты освоения:

– сформированность представлений о математике как части мировой культуры и о месте математики в современной цивилизации, о способах описания на математическом языке явлений реального мира;

– сформированность представлений о математических понятиях как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать

разные процессы и явления; понимание возможности аксиоматического построения математических теорий;

– владение методами доказательств и алгоритмов решения; умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;

– сформированность представлений об основных понятиях, идеях и методах математического анализа;

– сформированность представлений о необходимости доказательств при обосновании математических утверждений и роли аксиоматики в проведении дедуктивных рассуждений;

– сформированность понятийного аппарата по основным разделам курса математики; знаний основных теорем, формул и умения их применять; умения доказывать теоремы и находить нестандартные способы решения задач;

– сформированность умений моделировать реальные ситуации, исследовать построенные модели, интерпретировать полученный результат;

– сформированность представлений об основных понятиях математического анализа и их свойствах, владение умением характеризовать поведение функций, использование полученных знаний для описания и анализа реальных зависимостей.

## ЧИСЛОВАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ

Способы задания и свойства числовых последовательностей. Понятие о пределе последовательности. Существование предела монотонной ограниченной последовательности. Суммирование последовательностей. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия и ее сумма.

**1.** По заданной формуле  $n$ -го члена вычислите первые пять членов последовательности.

а)  $y_n = 3 - 2n$ ;

б)  $y_n = 2n^2 - n$ ;

в)  $y_n = n^3 - 1$ ;

г)  $y_n = \frac{3n-1}{2n}$ ;

д)  $y_n = (-1)^n$ ;

е)  $y_n = (-1)^n \frac{1}{10^n}$ .

**2.** По заданной формуле  $n$ -го члена вычислите первые пять членов последовательности.

а)  $y_n = \frac{(-2)^n}{n^2 + 1}$ ;

б)  $y_n = \frac{(-1)^n + 2}{3n - 2}$ ;

в)  $y_n = 3 \cos \frac{2\pi}{n}$ ;

г)  $y_n = \operatorname{tg} \left( (-1)^n \frac{\pi}{4} \right)$ ;

д)  $y_n = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{n}$ ;

е)  $y_n = \sin \pi n - \cos \pi n$ .

**3.** Составьте одну из возможных формул  $n$ -го члена последовательности по первым пяти ее членам.

а) 0, 1, 2, 3, 4, ...;

б) -1, -2, -3, -4, -5, ...;

в) 5, 6, 7, 8, 9, ...;

г) 10, 9, 8, 7, 6, ...;

д) 5, 10, 15, 20, 25, ...;

е) 6, 12, 18, 24, 30, ...;

ж) 4, 8, 12, 16, 20, ...;

з) 3, 6, 9, 12, 15, ...;

и) 3, 9, 27, 81, 243, ...;

к) 9, 16, 25, 36, 49, ...;

л) 1, 8, 27, 64, 125, ...;

м) 2, 9, 28, 65, 126, ...

**4.** Составьте одну из возможных формул  $n$ -го члена последовательности по первым пяти ее членам.

а)  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ ;

б)  $\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{9}{10}, \frac{11}{12}, \dots$ ;

в)  $1, \frac{1}{8}, \frac{1}{27}, \frac{1}{64}, \frac{1}{125}, \dots$ ;

г)  $\frac{1}{3 \cdot 5}, \frac{1}{5 \cdot 7}, \frac{1}{7 \cdot 9}, \frac{1}{9 \cdot 11}, \frac{1}{11 \cdot 13}, \dots$

**5.** Найдите сумму геометрической прогрессии  $(b_n)$ .

- а)  $b_1 = -1, q = 0,2$ ;                      б)  $b_1 = 2, q = -\frac{1}{3}$ ;  
в)  $b_1 = 3, q = \frac{1}{3}$ ;                      г)  $b_1 = -5, q = -0,1$ .

**6.** Найдите сумму геометрической прогрессии.

- а) 32, 16, 8, 4, 2, ...;                      б) 24, -8,  $\frac{8}{3}, -\frac{8}{9}, \dots$ ;  
в) 27, 9, 3, 1,  $\frac{1}{3}, \dots$ ;                      г) 18, -6, 2,  $-\frac{2}{3}, \dots$

**7.** Вычислите.

- а) а)  $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$ ;                      б)  $\frac{3}{2} - 1 + \frac{2}{3} - \frac{4}{9} + \dots$ ;  
в)  $49 + 7 + 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \dots$ ;                      г)  $125 + 25 + 5 + 1 + \dots$ ;  
д)  $-6 + \frac{2}{3} - \frac{2}{27} + \frac{2}{243} - \dots$ ;                      е)  $49 - 14 + 4 - \frac{8}{7} + \dots$ ;  
ж)  $3 + \sqrt{3} + 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots$ ;                      з)  $4 + 2\sqrt{2} + 2 + \sqrt{2} + \dots$

**8.** Найдите знаменатель и сумму геометрической прогрессии.

- а)  $b_1 = -2, b_2 = 1$ ;                      б)  $b_1 = 3, b_2 = \frac{1}{3}$ ;  
в)  $b_1 = 7, b_2 = -1$ ;                      г)  $b_1 = -20, b_2 = 4$ .

**9.** Найдите знаменатель геометрической прогрессии  $(b_n)$ .

- а)  $S = 2, b_1 = 3$ ;                      б)  $S = -10, b_1 = -5$ ;  
в)  $S = -\frac{9}{4}, b_1 = -3$ ;                      г)  $S = 1,5, b_1 = 2$ .

**10.** Найдите первый член геометрической прогрессии  $(b_n)$ .

- а)  $S = 10, q = 0,1$ ;                      б)  $S = -3, q = -\frac{1}{3}$ ;  
в)  $S = 6, q = -0,5$ ;                      г)  $S = -21, q = \frac{1}{7}$ .

**11.** Найдите  $n$ -й член геометрической прогрессии  $(b_n)$ .

- а)  $S = 15, q = -\frac{1}{3}, n = 3$ ;                      б)  $S = -20, b_1 = -16, n = 4$ ;

в)  $S = 20, b_1 = 22, n = 4;$       г)  $S = 21, q = \frac{2}{3}, n = 3.$

**12.** Найдите сумму геометрической прогрессии  $(b_n)$ .

а)  $b_n = \frac{25}{3^n};$

б)  $b_n = (-1)^n \frac{13}{2^{n-1}};$

в)  $b_n = \frac{45}{6^n};$

г)  $b_n = (-1)^n \frac{7}{6^{n-2}}.$

**13.** Найдите пределы функций.

а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3} \right);$

б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{x^2} + \frac{8}{x^3} \right);$

в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5}{x^3} + 1 \right) \cdot \left( -\frac{8}{x^2} - 2 \right);$

г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{7}{x^6} - 2 \right) \cdot \left( -\frac{8}{x^{10}} - 3 \right);$

д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x-2};$

е)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-4}{x+3};$

ж)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-4}{2x+7};$

з)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x+9}{6x-1}.$

**14.** Найдите пределы функций.

а)  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 3x + 5);$

б)  $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 6x - 8);$

в)  $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 5x + 8);$

г)  $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - x + 4);$

д)  $\lim_{x \rightarrow 0} (5x^2 - 6x + 2);$

е)  $\lim_{x \rightarrow -3} (10x^2 + 2x - 1);$

ж)  $\lim_{x \rightarrow -1} (4x^5 + 3x^2 + 9);$

з)  $\lim_{x \rightarrow 2} (8x^2 + 2x - 1).$

**15.** Найдите пределы функций.

а)  $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x+4};$

б)  $\lim_{x \rightarrow 6} \sqrt{x+3};$

в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{8+3x-x^2};$

г)  $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt[3]{3x-1};$

д)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x + \cos x}{\cos 3x + \cos x};$

е)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos 3x}{\sin 5x + \sin 3x}.$

**16.** Найдите предел  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{5x^2 + x - 6}{-x^2 - 4x + 5}$  при

а)  $x_0 = 2;$

б)  $x_0 = 1;$

в)  $x_0 = \infty.$



17. Найдите предел  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 + 5x + 6}{2x^2 + 3x - 9}$  при  
а)  $x_0 = 1$ ;                      б)  $x_0 = -3$ ;                      в)  $x_0 = \infty$ .

18. Найдите предел  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 + x - 28}{7x^2 + 26x - 8}$  при  
а)  $x_0 = 1$ ;                      б)  $x_0 = -4$ ;                      в)  $x_0 = \infty$ .

19. Найдите предел  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 + 15x + 50}{2x^2 + 15x + 25}$  при  
а)  $x_0 = 1$ ;                      б)  $x_0 = -5$ ;                      в)  $x_0 = \infty$ .

20. Найдите предел  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3x^2 + 7x - 10}{2x^2 - 3x + 1}$  при  
а)  $x_0 = 2$ ;                      б)  $x_0 = 1$ ;                      в)  $x_0 = \infty$ .

21. Найдите предел  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 - 5x - 3}{3x^2 - 4x - 15}$  при  
а)  $x_0 = 1$ ;                      б)  $x_0 = 3$ ;                      в)  $x_0 = \infty$ .

22. Найдите предел  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 - x - 6}{4x^2 - 7x - 2}$  при  
а)  $x_0 = 0$ ;                      б)  $x_0 = 2$ ;                      в)  $x_0 = \infty$ .

23. Найдите предел  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 + 5x + 6}$  при  
а)  $x_0 = 2$ ;                      б)  $x_0 = -3$ ;                      в)  $x_0 = \infty$ .

24. Найдите предел  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3x^2 + 11x + 10}{2x^2 + 5x + 2}$  при  
а)  $x_0 = 2$ ;                      б)  $x_0 = -2$ ;                      в)  $x_0 = \infty$ .

25. Найдите предел  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3x^2 - 14x + 8}{2x^2 - 7x - 4}$  при  
а)  $x_0 = 1$ ;                      б)  $x_0 = 4$ ;                      в)  $x_0 = \infty$ .

## ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

Понятие о производной функции, ее геометрический и физический смысл. Уравнение касательной к графику функции. Производные суммы, разности, произведения, частные. Производные основных элементарных функций. Применение производной к исследованию функций и построению графиков. Производные обратной функции и композиции функции.

Примеры использования производной для нахождения наилучшего решения в прикладных задачах. Вторая производная, ее геометрический и физический смысл. Нахождение скорости для процесса, заданного формулой и графиком.

**1.** Найдите приращение функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .

а)  $f(x) = 1 - 2x$ ,  $x_0 = 4$ ,  $\Delta x = -0,01$ ;

б)  $f(x) = 3x + 1$ ,  $x_0 = 5$ ,  $\Delta x = 0,01$ ;

в)  $f(x) = -2x + 1,6$ ,  $x_0 = -3$ ,  $\Delta x = -0,1$ ;

г)  $f(x) = 2x^2 - 3$ ,  $x_0 = 3$ ,  $\Delta x = -0,2$ ;

д)  $f(x) = 3x^2 - 5$ ,  $x_0 = 4$ ,  $\Delta x = 0,1$ ;

е)  $f(x) = 3,5x^2$ ,  $x_0 = -3$ ,  $\Delta x = -0,35$ ;

ж)  $f(x) = -\frac{2}{x}$ ,  $x_0 = -2$ ,  $\Delta x = 0,1$ ;

з)  $f(x) = \frac{x^2}{2}$ ,  $x_0 = 2$ ,  $\Delta x = 0,1$ .

**2.** Найдите производные функций.

а)  $y = x^5 - 4x^3 - 2x + 3$ ;

б)  $y = 3\sin x - 2^x + \sqrt{x}$ ;

в)  $y = x^7 + 2x^4 - \frac{3}{x} + 5$ ;

г)  $y = 6\ln x + 4e^x - 7\text{arccctg}x$ ;

д)  $y = 2x^8 - 3x^2 + \sqrt{x} - 2$ ;

е)  $y = 2\ln x + 5x^8 - 2e^x$ ;

ж)  $y = x^4 - 5x^3 + 2^x$ ;

з)  $y = 3x^5 - \log_4 x + 2e^x$ ;

и)  $y = 3x^6 + 5x^4 - x + 7$ ;

к)  $y = 3\text{ctg}x + 5^x - 3\sqrt[5]{x}$ .

**3.** Найдите производные функций.

а)  $y = 2x^5 + x^4 - \frac{1}{x} + 3$ ;

б)  $y = 5\ln x + 4e^x + 2\arccos x$ ;

в)  $y = 4x^5 - x^2 + \frac{5}{x} + 4$ ;

г)  $y = \log_4 x + 2e^x + 3\arcsin x$ ;

д)  $y = 7x^5 + 2x^3 - 3\sqrt{x}$ ;

е)  $y = 3\cos x - 5^x - \sqrt[2]{x}$ ;

ж)  $y = x^{10} - 3x^5 + 4x - 2$ ;

з)  $y = 3x^2 + \sin x - 5\text{arctg}x$ ;

$$\text{и) } y = 5x^4 - 2x^3 + \sqrt{x} - 1;$$

$$\text{к) } y = 3 \ln x - 4e^x + \sqrt[6]{x}.$$

**4. Найдите производные функций.**

$$\text{а) } y = x^3 \cdot 5^x;$$

$$\text{б) } y = x^2 \cdot \cos x;$$

$$\text{в) } y = (x^2 - 1) \cdot \operatorname{tg} x;$$

$$\text{г) } y = x^5 \cdot 4^x;$$

$$\text{д) } y = \operatorname{tg} x \cdot e^x;$$

$$\text{е) } y = (x^4 + 2) \cdot \ln x;$$

$$\text{ж) } y = x^7 \cdot \operatorname{ctg} x;$$

$$\text{з) } y = \sqrt{x} \cdot \operatorname{tg} x;$$

$$\text{и) } y = (x^4 + 3) \cdot \sqrt{x};$$

$$\text{к) } y = x^5 \cdot e^x.$$

**5. Найдите производные функций.**

$$\text{а) } y = x^3 \cdot \ln x;$$

$$\text{б) } y = (x^4 + 7) \cdot \lg x;$$

$$\text{в) } y = x^4 \cdot \sin x;$$

$$\text{г) } y = \sqrt{x} \cdot \log_5 x;$$

$$\text{д) } y = (x^4 + x) \cdot \frac{1}{x};$$

$$\text{е) } y = x^3 \cdot \cos x;$$

$$\text{ж) } y = 12x^3 \cdot \sqrt{x};$$

$$\text{з) } y = (x^3 + 1) \cdot \sin x.$$

**6. Найдите производные функций.**

$$\text{а) } y = \frac{x^2 + 1}{4x - 3};$$

$$\text{б) } y = \frac{x^5 + x^3 + x}{x + 1};$$

$$\text{в) } y = \frac{e^x}{\sin x};$$

$$\text{г) } y = \frac{3x + 1}{2x - 5};$$

$$\text{д) } y = \frac{\sqrt{x} + x^2 + 1}{x - 1};$$

$$\text{е) } y = \frac{\sin x}{x^2 + 4};$$

$$\text{ж) } y = \frac{4x^2 + 1}{5x - 3};$$

$$\text{з) } y = \frac{3x^2 + 2x - 1}{2x + 1};$$

**7. Найдите производные функций.**

$$\text{а) } y = \frac{\cos x - 1}{\sin x};$$

$$\text{б) } y = \frac{4x + 1}{x^2 + 3};$$

$$\text{в) } y = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x + 1};$$

$$\text{г) } y = \frac{e^x + 2x}{\cos x};$$

$$\text{д) } y = \frac{x^2 + 4}{x^3 + 5};$$

$$\text{е) } y = \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x}};$$

$$\text{ж) } y = \frac{\cos x + 5}{\sin x};$$

$$\text{з) } y = \frac{5x - 1}{4x + 3};$$

$$\text{и) } y = \frac{x^3 \sqrt{x} + 3x + 18}{\sqrt[3]{x}};$$

$$\text{к) } y = \frac{e^x}{x^3 + 5}.$$

**8.** Вычислите производные функций в точке  $x_0 = 1$ .

а)  $y = 4x^3 - 3x^2 - x - 1$ ;      б)  $y = (2x^3 - 1)(x^2 + 1)$ ;      в)  $y = \frac{5x - 2}{4x + 1}$ .

**9.** Вычислите производные функций в точке  $x_0 = -1$ .

а)  $y = 3x^4 - 2x^2 + 4x - 1$ ;      б)  $y = (3 - x^2)(4 + x^2)$ ;      в)  $y = \frac{7x + 1}{4x - 3}$ .

**10.** Вычислите производные функций в точке  $x_0 = 3$ .

а)  $y = 1 - x^2 + x^3 - x^4 + x^5$ ;      б)  $y = (x^3 + x^2)(x^2 - 1)$ ;      в)  $y = \frac{4x - 1}{4x + 2}$ .

**11.** Вычислите производные функций в точке  $x_0 = -1$ .

а)  $y = 2x^5 + x^4 - x + 4$ ;      б)  $y = (x^4 + x^2)(x^3 + x^2)$ ;      в)  $y = \frac{5x - 1}{6x + 3}$ .

**12.** Вычислите производные функций в точке  $x_0 = 1$ .

а)  $y = 7x^5 + 2x^3 - 8\sqrt{x}$ ;      б)  $y = (2x^3 + x)(x^2 + 2x)$ ;      в)  $y = \frac{7x + 8}{4x + 1}$ .

**13.** Вычислите производные функций в точке  $x_0 = 2$ .

а)  $y = 9x^5 + 3x^4 - 7x + \frac{2}{x}$ ;      б)  $y = (x^2 - 1)(3 + x^2)$ ;      в)  $y = \frac{5x - 9}{4x - 3}$ .

**14.** Найдите производные сложных функций.

а)  $y = \sqrt{3x^4 - 8x^3 - 2x + 1}$ ;      б)  $y = (5x + 2)^3$ ;  
в)  $y = e^{7x-9}$ ;      г)  $y = \cos(2x - \frac{\pi}{3})$ ;  
д)  $y = \ln(8 - 3x)$ ;      е)  $y = \sqrt{4x - \sin x}$ ;  
ж)  $y = \sqrt{4x^3 - 6x^2 - 2}$ ;      з)  $y = e^{2x-4}$ ;  
и)  $y = (10x + 3)^5$ ;      к)  $y = \sin(2x + \frac{\pi}{10})$ .

**15.** Найдите производные сложных функций.

а)  $y = \ln(6 - 11x)$ ;      б)  $y = e^{4-7x}$ ;  
в)  $y = \sqrt{4x + \cos 2x}$ ;      г)  $y = \operatorname{tg}(4x + 3)$ ;  
д)  $y = e^{2x-4} + 2\ln x$ ;      е)  $y = e^{3x-5}$ ;  
ж)  $y = \ln(7 - 5x)$ ;      з)  $y = (4x + 13)^6$ ;  
и)  $y = e^{3x-1} + 3\ln x$ ;      к)  $y = (2x + 5)^3$ .

**16.** Найдите производные сложных функций.

- а)  $y = \operatorname{tg}(9x + 4)$ ;                      б)  $y = \sin\left(4x - \frac{2\pi}{3}\right)$ ;  
в)  $y = e^{3x-5}$ ;                              г)  $y = \ln(3x^2 - 5)$ ;  
д)  $y = \ln(5x + 2)$ ;                      е)  $y = \cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right)$ ;  
ж)  $y = (4x - 3)^7$ ;                      з)  $y = 2^{\cos x + 1}$ ;  
и)  $y = \sqrt{\log_2 x}$ ;                      к)  $y = \sin(\ln x)$ ;  
л)  $y = \ln(\cos x)$ ;                      м)  $y = \sqrt{x^2 + 2x - 1}$ .

**17.** Вычислите производные функций в точке  $x_0$ .

- а)  $y = (x^2 - 5x + 1)^{10}$ ,  $x_0 = 0$ ;                      б)  $y = (x^2 - 2x - 3)^5$ ,  $x_0 = 2$ ;  
в)  $y = (\sqrt{x} - 5)^5$ ,  $x_0 = 4$ ;                      г)  $y = (\sqrt{x} + 2)^4$ ,  $x_0 = 1$ ;  
д)  $y = \sqrt{5x^2 - 2x}$ ,  $x_0 = 2$ ;                      е)  $y = \sqrt{4x^2 - 5x}$ ,  $x_0 = -1$ .

**18.** Найдите производную функции.

- а)  $y = \sqrt{\frac{2x-1}{3}} + \ln \frac{2x+3}{5}$ ;                      б)  $y = \sqrt{\frac{1-x}{6}} - 2 \ln \frac{2-5x}{3}$ ;  
в)  $y = 2e^{\frac{1-x}{3}} + 3 \cos \frac{1-x}{2}$ ;                      г)  $y = 3e^{\frac{2-x}{3}} - 2 \sin \frac{1+x}{4}$ ;  
д)  $y = \sqrt[3]{\frac{3}{2-x}} - 3 \cos \frac{x-2}{3}$ ;                      е)  $y = 2 \sqrt[4]{\frac{1}{(x+2)^3}} - 5e^{\frac{x-4}{5}}$ ;  
ж)  $y = 0,5^x \cdot \cos 2x$ ;                      з)  $y = 5\sqrt{x} \cdot e^{-x}$ .

**19.** Найдите производную функции.

- а)  $y = e^{3-2x} \cdot \cos(3-2x)$ ;                      б)  $y = \sin 3x \cdot e^{2x-5}$ ;  
в)  $y = \frac{\sqrt{3x+1}}{3^x+1}$ ;                      г)  $y = \frac{e^{0,5x}}{\cos 2x - 5}$ ;  
д)  $y = \frac{5^{2x}}{\sin 3x + 7}$ ;                      е)  $y = \frac{1 - \sin 2x}{\sin x - \cos x}$ .

**20.** Найдите вторую производную.

- а)  $x^5 - 7x^3 + 3$ ;                      б)  $2x^5 - \frac{4}{x^3} + \frac{1}{x} + 3\sqrt{x}$ ;  
в)  $(x+3)^4$ ;                      г)  $(2x-4)^5$ ;  
д)  $\sqrt{3x-2}$ ;                      е)  $\sqrt{9-x^2}$ .

ж)  $\sin x$ ;

з)  $\cos x$ .

**21.** Найдите вторую производную.

а)  $e^x + x^2$ ;

б)  $1 + x^5 + e^x$ ;

в)  $x \cdot (x-1)^3$ ;

г)  $x \cdot \cos x$ ;

д)  $\frac{x^2}{x+1}$ ;

е)  $\frac{5x^2 + 3x - 1}{x+4}$ .

**22.** Решите уравнение  $f'(x) = 0$ .

а)  $f(x) = 2x^2 - x$ ;

б)  $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 12$ ;

в)  $f(x) = \frac{x^3}{3} - 1,5x^2 - 4x$ ;

г)  $f(x) = 2x - 5x^2$ ;

д)  $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ ;

е)  $f(x) = 5 + 3x^4 - 36x^2 - 4x^3$ ;

ж)  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7$ ;

з)  $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - 1$ ;

и)  $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x}$ ;

к)  $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x-1}$ ;

л)  $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2x + 5}$ ;

м)  $f(x) = \frac{1 - 3x - x^2}{1 + x + x^2}$ .

**23.** Решите неравенство  $f'(x) < 0$ .

а)  $f(x) = 4x - 3x^2$ ;

б)  $f(x) = x^3 + 1,5x^2$ ;

в)  $f(x) = x^2 - 5x$ ;

г)  $f(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3$ ;

д)  $f(x) = x^3 - 6x^2 - 63x$ ;

е)  $f(x) = 3x - 5x^2 + x^3$ ;

ж)  $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 8x$ ;

з)  $f(x) = 3x^2 - 9x - \frac{1}{3}x^3$ .

**24.** Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке с абсциссой  $x_0$ .

а)  $f(x) = 2\sqrt{x} - 6x + 2$ ,  $x_0 = 16$ ;

б)  $f(x) = \frac{2}{x} + 4x$ ,  $x_0 = 0,5$ ;

в)  $f(x) = 7^x + 5x + 7$ ,  $x_0 = 1$ ;

г)  $f(x) = 6\cos x + 3x$ ,  $x_0 = \frac{\pi}{6}$ ;

д)  $f(x) = \lg x - 13x + 9$ ,  $x_0 = 1$ ;

е)  $f(x) = 8\sin x - 2x$ ,  $x_0 = -\frac{\pi}{2}$ ;

ж)  $f(x) = 4\operatorname{tg}x - 8x$ ,  $x_0 = -\frac{\pi}{4}$ ;

з)  $f(x) = \log_5 x - 85x$ ,  $x_0 = 1$ .

**25.** Найти угол между касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке с абсциссой  $x_0$  и осью  $Ox$ .

а)  $f(x) = \frac{1}{3}x^3, x_0 = 1;$

б)  $f(x) = \frac{1}{x}, x_0 = 1;$

в)  $f(x) = 2\sqrt{x}, x_0 = 3;$

г)  $f(x) = \frac{18}{\sqrt{x}}, x_0 = 3;$

д)  $f(x) = e^{\frac{3x+1}{2}}, x_0 = 0;$

е)  $f(x) = \ln(2x+1), x_0 = 2.$

**26.** Написать уравнение касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке с абсциссой  $x_0$ .

а)  $f(x) = x^2 - 2x, x_0 = 3;$

б)  $f(x) = x^3 - 2x^2, x_0 = 3;$

в)  $f(x) = x^3 + 3x, x_0 = 2;$

г)  $f(x) = x^2 + 5x - 3, x_0 = 1;$

д)  $f(x) = \frac{1}{x}, x_0 = 3;$

е)  $f(x) = \frac{1}{x}, x_0 = -2;$

ж)  $f(x) = \sin x, x_0 = \frac{\pi}{4};$

з)  $f(x) = e^x, x_0 = 0;$

и)  $f(x) = \ln x, x_0 = 1;$

к)  $f(x) = \sqrt{x}, x_0 = 1.$

**27.** Материальная точка движется прямолинейно по закону  $S = S(t)$ , где  $S$  – расстояние от точки отсчета в метрах,  $t$  – время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите ее скорость и ускорение в момент времени  $t_0$ .

а)  $S(t) = t^3 + 4t^2, t_0 = 1;$

б)  $S(t) = 7t^3 - 2t^2, t_0 = 2;$

в)  $S(t) = t^3 + 3t^2, t_0 = 2;$

г)  $S(t) = 4t^3 + 3t^2 - 2t, t_0 = 1;$

д)  $S(t) = 2t^3 - 5t^2, t_0 = 3;$

е)  $S(t) = 5t^3 - 2t^2, t_0 = 2;$

ж)  $S(t) = 2t^3 + t^2, t_0 = 4;$

з)  $S(t) = 3t^3 + 7t^2, t_0 = 3;$

и)  $S(t) = 5t^3 + 2t^2 - 3, t_0 = 1;$

к)  $S(t) = 4t^3 - 3t^2 + 5, t_0 = 2.$

**28.** Материальная точка движется прямолинейно по закону  $S = S(t)$ , где  $S$  – расстояние от точки отсчета в метрах,  $t$  – время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите ее скорость и ускорение в момент времени  $t_0$ .

а)  $S(t) = t^3 + 8t^2 + 1, t_0 = 3;$

б)  $S(t) = 6t^3 + t^2 - 1, t_0 = 4;$

в)  $S(t) = 3t^3 - t^2 + 2t, t_0 = 2;$

г)  $S(t) = 2t^3 + 5t^2 - 3, t_0 = 5;$

д)  $S(t) = 10t^3 + t^2 - 3, t_0 = 1;$

е)  $S(t) = 7t^2 + 2t + 3, t_0 = 4;$

ж)  $S(t) = 2t^4 + 7t^3 - t, t_0 = 1;$

з)  $S(t) = 5t^3 + 8t^2 + 3, t_0 = 2.$

**29.** Найдите промежутки возрастания, убывания и экстремумы функции.

а)  $y = x^4 - 4x^3$ ;

б)  $y = x^3 + 3x^2 - 4$ ;

в)  $y = -x^3 + 3x^2 - 4$ ;

г)  $y = -x^4 + 2x^2$ ;

д)  $y = -x^3 + 3x + 1$ ;

е)  $y = \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + x$ ;

ж)  $y = 4x^3 - 2x^2$ ;

з)  $y = \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x$ .

**30.** Найдите промежутки возрастания, убывания и экстремумы функции.

а)  $y = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ ;

б)  $y = x^3 - \frac{3x^2}{2}$ ;

в)  $y = \sqrt{5 - x^2}$ ;

г)  $y = \sqrt{x^2 + 2x}$ ;

д)  $y = \frac{x^2 - 3x}{x + 1}$ ;

е)  $y = \frac{x^3}{x^2 + 3}$ .

**31.** Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке.

а)  $y = x^4 + 4x$ ,  $[-2; 1]$ ;

б)  $y = 2x^2 - 4x^3$ ,  $[-1; 2]$ ;

в)  $y = \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 3x$ ,  $[0; 2]$ ;

г)  $y = \frac{x^4}{2} - x^2$ ,  $[-2; 1]$ ;

д)  $y = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x$ ,  $[-1; 3]$ ;

е)  $y = 3x - x^3$ ,  $[-2; 2]$ .

**32.** Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке.

а)  $y = x^4 - 2x^2 + 1$ ,  $[-2; 2]$ ;

б)  $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x$ ,  $[-2; 3]$ ;

в)  $y = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x$ ,  $[0; 2]$ ;

г)  $y = x^3 - 3x$ ,  $[-2; 2]$ ;

д)  $y = x^4 - 4x^3$ ,  $[-1; 4]$ ;

е)  $y = x^3 + 3x^2 - 4$ ,  $[-3; 1]$ .

**33.** Исследуйте функцию и постройте ее график.

а)  $y = x^3 - 3x$ ;

б)  $y = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x$ ;

в)  $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x$ ;

г)  $y = x^4 - 2x^2 + 1$ ;



д)  $y = 3x - x^3$ ;

е)  $y = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x$ ;

ж)  $y = \frac{x^4}{2} - x^2$ ;

з)  $y = \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 3x$ .

**34.** Исследуйте функцию и постройте ее график.

а)  $y = 2x^2 - 4x^3$ ;

б)  $y = x^4 + 4x$ ;

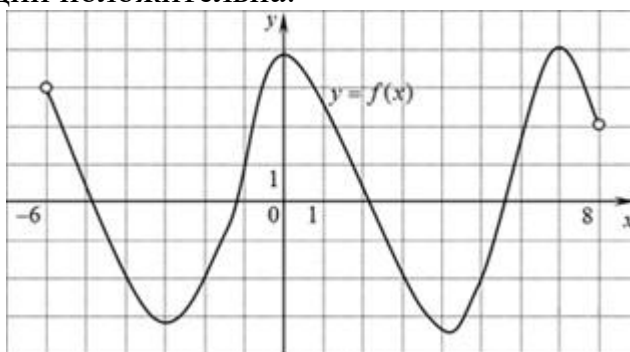
в)  $y = x^2\sqrt{1+x}$ ;

г)  $y = x\sqrt{2-x}$ ;

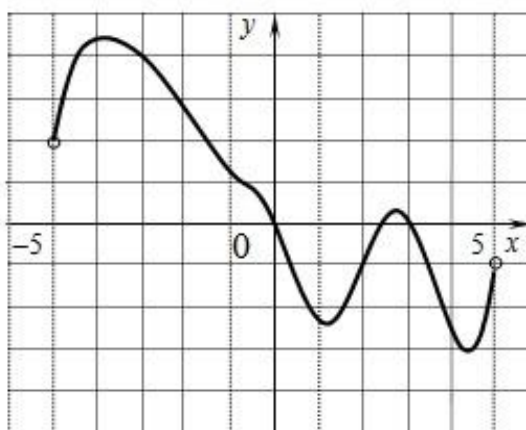
д)  $y = \frac{6(x-1)}{x^2+3}$ ;

е)  $y = \frac{2x}{1-x^2}$ .

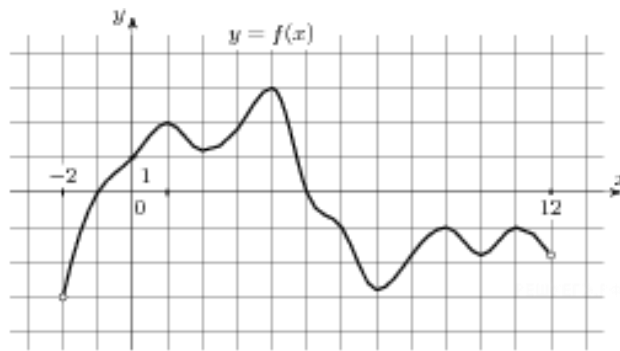
**35.** На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$ , определенной на интервале  $(-6;8)$ . Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.



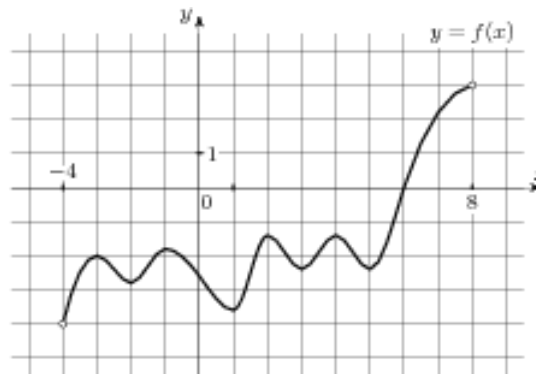
**36.** На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$ , определенной на интервале  $(-5;5)$ . Определите количество целых точек, в которых производная функции  $y = f(x)$  отрицательна.



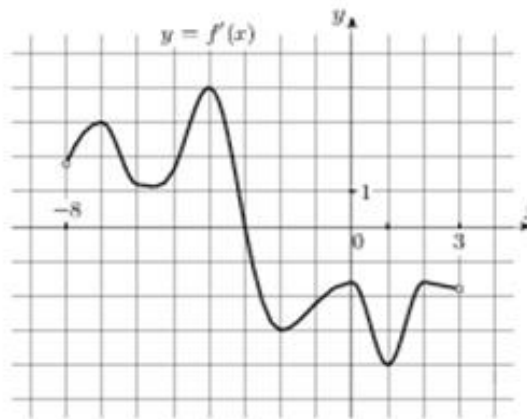
**37.** На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$ , определенной на интервале  $(-2;12)$ . Найдите сумму точек экстремума функции  $y = f(x)$ .



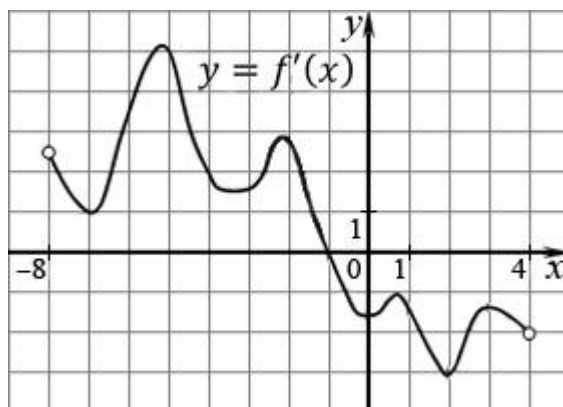
**38.** На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$ , определенной на интервале  $(-4; 8)$ . Найдите сумму точек экстремума функции  $y = f(x)$ .



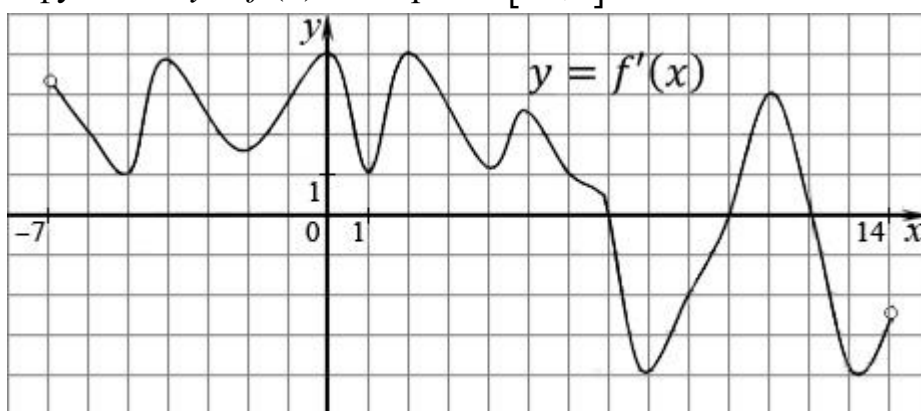
**39.** На рисунке изображён график  $y = f'(x)$  – производной функции  $y = f(x)$ , определенной на интервале  $(-8; 3)$ . В какой точке отрезка  $[-3; 2]$  функция  $y = f(x)$  принимает наибольшее значение?



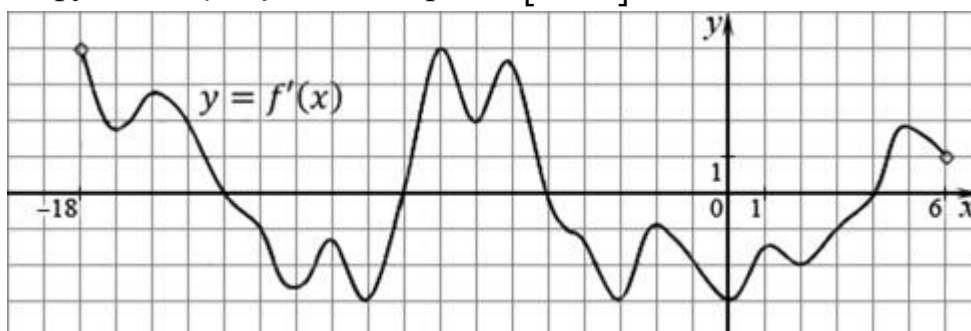
**40.** На рисунке изображён график  $y = f'(x)$  – производной функции  $y = f(x)$ , определенной на интервале  $(-8; 4)$ . В какой точке отрезка  $[-7; -3]$  функция  $y = f(x)$  принимает наименьшее значение?



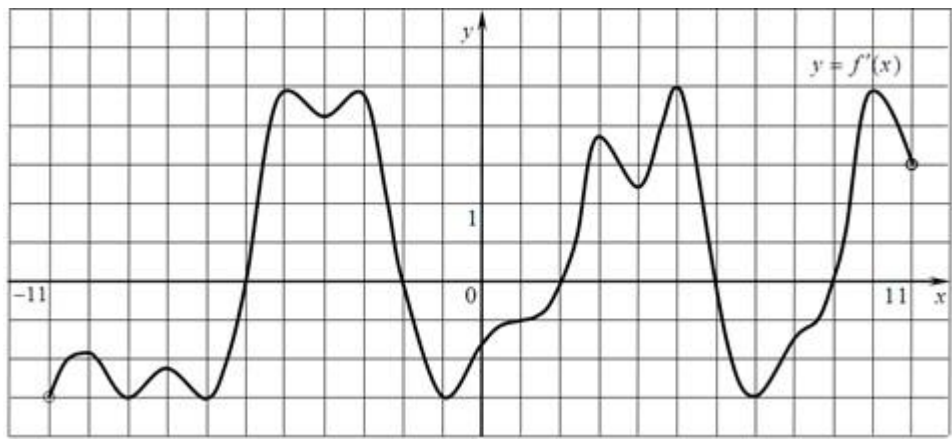
41. На рисунке изображён график  $y = f'(x)$  – производной функции  $y = f(x)$ , определенной на интервале  $(-7;14)$ . Найдите количество точек максимума функции  $y = f(x)$  на отрезке  $[-6;9]$ .



42. На рисунке изображён график  $y = f'(x)$  – производной функции  $y = f(x)$ , определенной на интервале  $(-18;6)$ . Найдите количество точек минимума функции  $y = f(x)$  на отрезке  $[-13;1]$ .



43. На рисунке изображён график  $y = f'(x)$  – производной функции  $y = f(x)$ , определенной на интервале  $(-11;11)$ . Найдите количество точек экстремума функции  $y = f(x)$  на отрезке  $[-10;10]$ .



## ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ

Применение определенного интеграла для нахождения площади криволинейной трапеции. Формула Ньютона-Лейбница. Примеры применения интеграла в физике и геометрии.

1. Докажите, что функция  $F(x)$  является первообразной для функции  $f(x)$ .

а)  $F(x) = x^2 + x^3$ ,  $f(x) = 2x + 3x^2$ ;

б)  $F(x) = x^4 - x^{11}$ ,  $f(x) = 4x^3 - 11x^{10}$ ;

в)  $F(x) = x^7 + x^9$ ,  $f(x) = 7x^6 + 9x^8$ ;

г)  $F(x) = x^{13} - x^{19}$ ,  $f(x) = 13x^{12} - 19x^{18}$ ;

д)  $F(x) = 3\sin x$ ,  $f(x) = 3\cos x$ ;

е)  $F(x) = -4\cos x$ ,  $f(x) = 4\sin x$ .

2. Докажите, что функция  $F(x)$  является первообразной для функции  $f(x)$ .

а)  $F(x) = \sin x \cos x$ ,  $f(x) = \cos 2x$ ;

б)  $F(x) = 2\operatorname{tg}x - 3x$ ,  $f(x) = \frac{2}{\cos^2 x} - 3$ ;

в)  $F(x) = \sin 2x$ ,  $f(x) = 2\cos 2x$ ;

г)  $F(x) = 3e^{\frac{x}{3}}$ ,  $f(x) = e^{\frac{x}{3}}$ ;

д)  $F(x) = 2x + e^{2x}$ ,  $f(x) = 2(1 + e^{2x})$ ;

е)  $F(x) = x - \ln(1 + x^2)$ ,  $f(x) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$ .

3. Найдите общий вид первообразных для функции  $f(x)$ .

а)  $f(x) = 2x^5 - 3x^2 - 4$ ;

б)  $f(x) = \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}$ ;

в)  $f(x) = 4\sqrt[3]{x} - 6\sqrt{x}$ ;

г)  $f(x) = 5x^4 + 2x^3 + 6$ ;

д)  $f(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x}$ ;

е)  $f(x) = 6\sqrt[5]{x} + 16\sqrt[3]{x}$ ;

ж)  $f(x) = \frac{2x^4 - 4x^3 + x}{3}$ ;

з)  $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x}$ ;

и)  $f(x) = 6\sqrt[3]{x} - \frac{2}{x} + 3e^x$ ;

к)  $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$ .

4. Найдите общий вид первообразных для функции  $f(x)$ .

а)  $f(x) = \frac{6x^3 - 3x + 2}{5}$ ;

б)  $f(x) = 1 + 7^x - 4\cos x$ ;

в)  $f(x) = e^x + 2\cos x$ ;

г)  $f(x) = 6\sin x + 3\cos x$ ;

д)  $f(x) = 4\cos x - 5\sin x$ ;

е)  $f(x) = 13\sin x + \frac{5}{\cos^2 x}$ ;

ж)  $f(x) = 3^x - \sin x$ ;

з)  $f(x) = \frac{3}{\sin^2 x} - 4 + 8^x$ ;

и)  $f(x) = 3\sin x - \frac{2}{1+x^2}$ ;

к)  $f(x) = 5 + 3\cos x$ .

5. Найдите общий вид первообразных для функции  $f(x)$ .

а)  $f(x) = \frac{5}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{5}{\sin^2 x}$ ;

б)  $f(x) = 16x^3 + \frac{4}{x} - 36\sin x$ ;

в)  $f(x) = \frac{22}{\cos^2 x} - 5x^4 - 71$ ;

г)  $f(x) = 3^x + 12\cos x - 34$ ;

д)  $f(x) = 69 - 27x^2 - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$ ;

е)  $f(x) = 13e^x + \frac{5}{\sin^2 x} + 123$ ;

ж)  $f(x) = \frac{29}{1+x^2} + 60x - 60$ ;

з)  $f(x) = \frac{11}{\cos^2 x} - 7x^6 - 77$ ;

и)  $f(x) = 48x^5 + \frac{1}{x} - 2\sin x$ ;

к)  $f(x) = 1 - 18x^2 - \frac{6}{\sqrt{1-x^2}}$ .

6. Найдите общий вид первообразных для функции  $f(x)$ .

а)  $f(x) = 2\sqrt{x} + 12\cos x - 12^x$ ;

б)  $f(x) = \frac{8}{1+x^2} + 20x + 9$ ;

в)  $f(x) = 47e^x + \frac{6}{x^3} + 2$ ;

г)  $f(x) = 3\sin x + 28x^3 - \frac{64}{x}$ ;

д)  $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \sqrt[3]{x} - 43$ ;

е)  $f(x) = 65 - 9^x + 14\cos x$ ;

ж)  $f(x) = 1 - 99x^2 - \frac{8}{\sqrt{1-x^2}}$ ;

з)  $f(x) = 31e^x + \frac{19}{\sin^2 x} - 60$ .

7. Найдите общий вид первообразных для функции  $y = f(x)$ .

а)  $f(x) = (x+1)^4$ ;

б)  $f(x) = (x-2)^3$ ;

в)  $f(x) = -\frac{1}{(6x+1)^2}$ ;

г)  $f(x) = \frac{1}{(7x-3)^2}$ ;

д)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{7x-9}}$ ;

е)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{42-3x}}$ ;

$$\text{ж) } f(x) = \frac{2}{\sqrt{x-2}};$$

$$\text{з) } f(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{x+3}};$$

$$\text{и) } f(x) = \sin 2x;$$

$$\text{к) } f(x) = \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}.$$

**8.** Найдите общий вид первообразных для функции  $y = f(x)$ .

$$\text{а) } f(x) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right);$$

$$\text{б) } f(x) = \cos(4x - 3);$$

$$\text{в) } f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right);$$

$$\text{г) } f(x) = \sin\left(2 - \frac{x}{2}\right);$$

$$\text{д) } f(x) = e^{\frac{x+1}{2}};$$

$$\text{е) } f(x) = e^{3x-5};$$

$$\text{ж) } f(x) = \frac{1}{x-1} + 4\cos(x+2);$$

$$\text{з) } f(x) = \frac{3}{x-3} - 2\sin(x-1);$$

$$\text{и) } f(x) = \frac{2}{\cos^2 2x} + \frac{3}{\sin^2 3x};$$

$$\text{к) } f(x) = -\frac{2}{x^5} + \frac{1}{\cos^2(3x-1)}.$$

**9.** Найдите общий вид первообразных для функции  $y = f(x)$ .

$$\text{а) } f(x) = e^{2x-5} - \cos 3x;$$

$$\text{б) } f(x) = e^{\frac{x}{4}} + \sin 2x;$$

$$\text{в) } f(x) = 2\sin \frac{x}{5} - 5e^{2x+\frac{1}{3}};$$

$$\text{г) } f(x) = 3\cos \frac{x}{7} + 2e^{3x-\frac{1}{2}};$$

$$\text{д) } f(x) = \sqrt[3]{3x-1} + \frac{1}{2-7x};$$

$$\text{е) } f(x) = \frac{4}{\sqrt{3x+1}} - \frac{3}{2x-5};$$

$$\text{ж) } f(x) = (1+2x)(x-3);$$

$$\text{з) } f(x) = (2x-3)(2+3x);$$

$$\text{и) } f(x) = (2x+1)\sqrt{x};$$

$$\text{к) } f(x) = (3x-2)\sqrt[3]{x}.$$

**10.** Для функции  $y = f(x)$  найдите ее первообразную, проходящую через данную точку  $M$ .

$$\text{а) } f(x) = 4x - 3, M(2;1);$$

$$\text{б) } f(x) = 2 - x, M(-2;1);$$

$$\text{в) } f(x) = x^2 - 2x, M(3;4);$$

$$\text{г) } f(x) = x^4 - x + 1, M(2;0);$$

$$\text{д) } f(x) = \sqrt{x} + 2, M(4;8);$$

$$\text{е) } f(x) = x - \frac{1}{\sqrt{x}}, M(9;6);$$

$$\text{ж) } f(x) = \sqrt[4]{x} - x\sqrt{x}, M(16;21);$$

$$\text{з) } f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[2]{x}, M(1;10);$$

$$\text{и) } f(x) = \frac{3}{x} + 5x, M(1;7);$$

$$\text{к) } f(x) = \frac{4}{x} - 6x^2, M(-1;8).$$

**11.** Для функции  $y = f(x)$  найдите ее первообразную, проходящую через данную точку  $M$ .

- а)  $f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x}, M(-4; 12);$       б)  $f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 4x}{x^4}, M(2; 5);$   
 в)  $f(x) = \sin 4x + \cos x, M\left(\frac{\pi}{2}; 2\right);$       г)  $f(x) = \cos 8x + \sin 9x, M\left(\frac{\pi}{4}; 0\right);$   
 д)  $f(x) = \sin 10x + \sin 8x, M\left(\frac{\pi}{8}; 10\right);$       е)  $f(x) = \cos 11x - \cos 9x, M\left(\frac{\pi}{4}; 0\right).$

**12.** Вычислить интеграл.

- а)  $\int_{-\frac{2}{3}}^1 x^3 dx;$       б)  $\int_{-1}^2 3x^2 dx;$       в)  $\int_{-1}^2 x^4 dx;$   
 г)  $\int_{-2}^3 2x dx;$       д)  $\int_1^2 \frac{dx}{x^3};$       е)  $\int_1^3 \frac{dx}{x^2};$   
 ж)  $\int_1^4 \sqrt{x} dx;$       з)  $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}};$       и)  $\int_1^5 \frac{7}{x} dx.$

**13.** Вычислить интеграл.

- а)  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{9 dx}{\sin^2 x};$       б)  $\int_1^e \frac{2}{x} dx;$       в)  $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{7 dx}{\cos^2 x};$   
 г)  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx;$       д)  $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x};$       е)  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx;$   
 ж)  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x};$       з)  $\int_0^1 e^x dx;$       и)  $\int_{-1}^1 3e^x dx.$

**14.** Вычислить интеграл.

- а)  $\int_{-2}^1 (x^3 + 4x) dx;$       б)  $\int_0^1 (4x^3 + 6x^2 - 5) dx;$   
 в)  $\int_{-1}^3 (9x^2 - 2x + 1) dx;$       г)  $\int_0^4 (x + 3) dx;$   
 д)  $\int_{-2}^1 (4x^3 - 2x - 4) dx;$       е)  $\int_0^2 (3x^2 + 4x + 3) dx;$



$$\text{ж)} \int_{-3}^2 (2x - 3) dx;$$

$$\text{з)} \int_{-2}^{-1} (5 - 4x) dx.$$

**15. Вычислить интеграл.**

$$\text{а)} \int_{-1}^2 (1 - 3x^2) dx;$$

$$\text{б)} \int_1^3 \left( \frac{2}{x^2} - 4 \right) dx;$$

$$\text{в)} \int_1^3 \left( 6 - \frac{4}{x^3} \right) dx;$$

$$\text{г)} \int_1^2 \left( \frac{4}{x^4} + 1 \right) dx;$$

$$\text{д)} \int_0^4 (x - 3\sqrt{x}) dx;$$

$$\text{е)} \int_1^{16} (2x + 8\sqrt{x}) dx;$$

$$\text{ж)} \int_1^{36} (2x + 2\sqrt{x}) dx;$$

$$\text{з)} \int_4^9 \left( 2 + \frac{10}{\sqrt{x}} \right) dx.$$

**16. Вычислить интеграл.**

$$\text{а)} \int_1^9 \left( 2x - \frac{3}{\sqrt{x}} \right) dx;$$

$$\text{б)} \int_4^{25} \left( \frac{6}{\sqrt{x}} - 4 \right) dx;$$

$$\text{в)} \int_1^2 \left( e^x + \frac{1}{x} \right) dx;$$

$$\text{г)} \int_0^1 (7 + e^x) dx;$$

$$\text{д)} \int_{-1}^0 (16x + \frac{1}{2}e^x) dx;$$

$$\text{е)} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (4\sin x - 6) dx;$$

$$\text{ж)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{8} - 3\cos x \right) dx;$$

$$\text{з)} \int_{-\pi}^{\pi} (5\sin x - 6) dx.$$

**17. Вычислить интеграл.**

$$\text{а)} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (\sin x - 4\cos x) dx;$$

$$\text{б)} \int_0^{\pi} (-3\cos x + \sin x) dx;$$

$$\text{в)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos x - \sin x) dx;$$

$$\text{г)} \int_1^2 \frac{x^2 - x^3 + 4}{x^5} dx;$$

$$\text{д)} \int_{-2}^{-1} \frac{4x^3 + x - 3}{x^4} dx;$$

$$\text{е)} \int_1^3 \frac{x^3 + 3x^2 + 4x}{x} dx.$$

**18.** Вычислить интеграл.

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \int_{-3}^2 (x-4)^2 dx; & \text{б)} \int_1^2 (5x-9)^4 dx; & \text{в)} \int_{-1,5}^{-1} (6x+5)^5 dx; \\ \text{г)} \int_1^{13} \sqrt{6x+3} dx; & \text{д)} \int_{\frac{2}{3}}^{11} 5\sqrt[5]{3x-1} dx; & \text{е)} \int_{-1}^0 \sqrt[3]{1-2x} dx. \end{array}$$

**19.** Вычислить интеграл.

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx; & \text{б)} \int_{\frac{\pi}{2}}^{3\pi} \cos \frac{x}{3} dx; & \text{в)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin \frac{x}{2} dx; \\ \text{г)} \int_0^4 e^{0,5x-1} dx; & \text{д)} \int_{-4}^4 e^{0,25x+1} dx; & \text{е)} \int_{-0,5}^0 e^{-2x+2} dx; \\ \text{ж)} \int_3^6 \frac{dx}{2x-1}; & \text{з)} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{4x+1}; & \text{и)} \int_5^8 \frac{dx}{9-x}. \end{array}$$

**20.** Вычислите площадь фигуры, ограниченной заданными линиями.

Сделать чертеж.

$$\begin{array}{l} \text{а)} y = x^2, y = 0, x = 4; \\ \text{б)} y = x^4, y = 0, x = -1, x = 2; \\ \text{в)} y = 4x^2, y = x^2, y = 4; \\ \text{г)} y = \frac{1}{x^2}, y = 0, x = 1, x = 2; \\ \text{д)} y = \sqrt{x}, y = 2, x = 0; \\ \text{е)} y = \frac{1}{\sqrt{x}}, y = 0, x = 1, x = 9; \\ \text{ж)} y = \sin x, y = 0, x = \frac{\pi}{2}; \\ \text{з)} y = \cos x, y = 0, x = -\frac{\pi}{4}, x = \frac{\pi}{4}; \\ \text{и)} y = \cos 2x, y = 0, x = -\frac{\pi}{6}, x = \frac{\pi}{6}; \\ \text{к)} y = \sin \frac{x}{2}, y = 0, x = \frac{\pi}{2}, x = \pi. \end{array}$$

**21.** Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками функций.  
Сделать чертеж.

а)  $y = 1 - x^2$ ,  $y = -x - 1$ ;

б)  $y = 4 - x^2$ ,  $y = x^2 - 2x$ ;

в)  $y = x^2 - 2x + 2$ ,  $y = -x + 4$ ;

г)  $y = -x^2 - 6x - 5$ ,  $y = -x - 2$ ;

д)  $y = x^2 - 3x + 2$ ,  $y = x - 1$ ;

е)  $y = x^2 - 1$ ,  $y = 2x + 2$ ;

ж)  $y = x^2 - 4x$ ,  $y = -(x - 4)^2$ ;

з)  $y = x^2 + 2x - 3$ ,  $y = -x^2 + 2x + 5$ .

**22.** Скорость тела, движущегося вдоль координатной прямой, изменяется с течением времени по закону  $v = v(t)$ . Найдите длину пути, пройденного телом за промежуток времени от  $t_1$  до  $t_2$ .

а)  $v(t) = 3t + 2$ ,  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = 1$ ;

б)  $v(t) = 6t^2 + t$ ,  $t_1 = 2$ ,  $t_2 = 5$ ;

в)  $v(t) = 2t - 4$ ,  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = 4$ ;

г)  $v(t) = 5 - 2t$ ,  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = 5$ ;

д)  $v(t) = 3t^2 - 18t + 24$ ,  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = 6$ ;

е)  $v(t) = t^2 - 9t + 18$ ,  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = 9$ ;

ж)  $v(t) = \cos 2\pi t$ ,  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = 2$ ;

з)  $v(t) = \sin \pi t$ ,  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = 8$ .

**23.** Найдите объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями.

а)  $y = x^2 + 1$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$ ;

б)  $y = \sqrt{x}$ ,  $x = 1$ ,  $x = 4$ ,  $y = 0$ ;

в)  $y = x + 2$ ,  $y = 1$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2$ ;

г)  $y = 2x$ ,  $y = x + 3$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$ .

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Башмаков, М. И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учебник/ М. И. Башмаков. – М.: ИЦ Академия, 2016. – 256 с.
2. Башмаков, М.И. Математика : алгебра и начала математического анализа, геометрия : учебник для студ. учреждений сред. проф. образования / М. И. Башмаков. – 4-е изд., стер. – М. : Академия, 2017. – 253 с.
3. Гумеров, Р. М. Математика : метод. указания к выполнению контрольной работы / Р. М. Гумеров, З. Ш. Аглямова, Г. Р. Ерошкина; Институт экономики, управления и права (г. Казань), Колледж, Кафедра высшей математики. – Казань : Изд-во «Познание» Института экономики, управления и права, 2014. – 28 с.
4. Дадаян, А. А. Математика [Электронный ресурс]: учебник / А. А. Дадаян. – 3-е изд. – М. : Форум: НИЦ ИНФРА-М, 2018. – 544 с. – Режим доступа: <http://znanium.com/catalog/product/967862>
5. Канцедал, С. А. Дискретная математика [Электронный ресурс] : учеб. пособие / С. А. Канцедал. – М. : ИД ФОРУМ: НИЦ Инфра-М, 2018. – 222 с. – Режим доступа: <http://znanium.com/catalog/product/927464>

**Краткий справочный материал**

**Правила дифференцирования**

Пусть  $C$  – постоянное число,  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$  – некоторые дифференцируемые функции, тогда

1.  $(C)' = 0$ ,
2.  $(x)' = 1$ ,
3.  $(u \pm v)' = u' \pm v'$ ,
4.  $(Cu)' = Cu'$ ,
5.  $(uv)' = u'v + uv'$ ,
6.  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$  ( $v \neq 0$ ),
7.  $\left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{Cv'}{v^2}$ , ( $v \neq 0$ ).

**Таблица производных основных элементарных функций**

- |                                                   |                                                       |
|---------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| 1. $(x^n)' = nx^{n-1}$ ,                          | 9. $(\cos x)' = -\sin x$ ,                            |
| 2. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ,          | 10. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ ,   |
| 3. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ , | 11. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ , |
| 4. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ ,                   | 12. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ,         |
| 5. $(e^x)' = e^x$ ,                               | 13. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ,        |
| 6. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ ,            | 14. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ ,   |
| 7. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ ,                     | 15. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ . |
| 8. $(\sin x)' = \cos x$ ,                         |                                                       |

**Основные правила интегрирования:**

1. Неопределённый интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций:

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

2. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$$\int af(x) dx = a \int f(x) dx, \quad a \neq 0.$$

3. Инвариантность формулы интегрирования:

Если  $\int f(x) dx = F(x) + C$ , то и  $\int f(z) dz = F(z) + C$ , где  $z = \varphi(x)$  – произвольная функция, имеющая непрерывную производную.

### Таблица основных интегралов

$$1. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1.$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

$$3. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

$$4. \int e^x dx = e^x + C.$$

$$5. \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$6. \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$7. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

$$8. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$11. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

$$12. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C.$$

$$13. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

$$14. \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C.$$

### Определенный интеграл

Определенный интеграл вычисляется по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где  $F(x)$  – любая первообразная функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ .



*Учебное издание*

# НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Сборник задач

Авторы:

*Гаврилова Людмила Николаевна  
Аглямова Зульфина Шамилевна  
Митина Евгения Константиновна  
Кожеманова Татьяна Николаевна*

Главный редактор *Г. Я. Дарчинова*  
Редактор *Т. В. Андреева*  
Технический редактор *С. А. Каримова*  
Дизайнер *Н. Е. Коняхина*

Подписано в печать 20.03.2019. Формат 60x84 1/16  
Гарнитура Times NR, 10. Усл. печ. л. 9  
Тираж 300 экз. Заказ № 90

Знак информационной продукции  
(Федеральный закон № 436-ФЗ от 29.12.2010)

16+



Издательство Казанского инновационного  
университета им. В. Г. Тимирязова (ИЭУП)  
420111, г. Казань, ул. Московская, 42  
Тел. (843)231-92-90  
E-mail: zaharova@ieml.ru

Отпечатано с готового оригинал-макета  
в типографии КИУ им. В. Г. Тимирязова (ИЭУП):  
420108, г. Казань, ул. Зайцева, 17