Казанский инновационный университет имени В. Г. Тимирясова

МАТЕМАТИКА

ГЕОМЕТРИЯ

Сборник задач

Казань
Познание
2019

УДК 514(076.1)
ББК 22.151я72
М34

Печатается по решению секции
естественно-научных дисциплин учебно-методического совета
Казанского инновационного университета им. В. Г. Тимирясова

Рецензенты:
доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики
Казанского инновационного университета им. В. Г. Тимирясова
С. И. Филиппов;
кандидат педагогических наук, доцент кафедры высшей математики и
информационных технологий Набережночелнинского филиала Казанского
инновационного университета им. В. Г. Тимирясова ***Ю. Н. Бурханова***

М34 Математика. Геометрия: сборник задач / Л. Н. Гаврилова, З. Ш. Аглямова, Е. К. Митина, Т. Н. Кожеманова. – Казань : Изд-во «Познание» Казанского инновационного университета им. В. Г. Тимирясова, 2019. – 48 с.

Сборник задач содержит задания по разделу «Геометрия» в рамках дисциплины «Математика» общеобразовательного цикла для студентов, обучающихся по различным специальностям колледжа.

Данный сборник задач может быть использован для проведения практических занятий и организации самостоятельной работы студентов при изучении дисциплины «Математика» общеобразовательного цикла.

УДК 514(076.1)
ББК 22.151я72

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 4
ВВЕДЕНИЕ В СТЕРЕОМЕТРИЮ 6
ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ 10
МНОГОГРАННИКИ 18
ТЕЛА И ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ 28
ИЗМЕРЕНИЯ В ГЕОМЕТРИИ 31
КООРДИНАТЫ И ВЕКТОРЫ 36
ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА 39
ПРИЛОЖЕНИЕ 40

ВВЕДЕНИЕ

Настоящий сборник задач предназначен для проведения практических занятий и организации самостоятельной работы студентов различных специальностей колледжа по разделу «Геометрия» при изучении дисциплины «Математика» общеобразовательного цикла. Данное пособие разработано в соответствии с рабочими программами дисциплины «Математика» общеобразовательного цикла, составленными на основе требований федеральных государственных образовательных стандартов среднего профессионального образования.

Пособие содержит задачи различного уровня сложности по следующим темам дисциплины «Математика» общеобразовательного цикла: «Введение в стереометрию», «Прямые и плоскости в пространстве», «Многогранники», «Тела и поверхности вращения», «Измерения в геометрии», «Координаты и векторы».

В приложении приводится краткий справочный материал по рассматриваемым темам.

Применение настоящего пособия при изучении дисциплины «Математика» общеобразовательного цикла должно способствовать тому, что будут достигнуты следующие

личностные результаты освоения:

– готовность и способность к образованию, в том числе самообразованию, на протяжении всей жизни; сознательное отношение к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной и общественной деятельности;

метапредметные результаты освоения:

– владение навыками познавательной, учебно-исследовательской и проектной деятельности, навыками разрешения проблем; способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания;

– готовность и способность к самостоятельной информационно-познавательной деятельности, владение навыками получения необходимой информации из словарей разных типов, умение ориентироваться в различных источниках информации, критически оценивать и интерпретировать информацию, получаемую из различных источников;

предметные результаты освоения:

– сформированность представлений о математике как части мировой культуры и о месте математики в современной цивилизации, о способах описания на математическом языке явлений реального мира;

– сформированность представлений о математических понятиях как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; понимание возможности аксиоматического построения математических теорий;

– владение методами доказательств и алгоритмов решения; умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;

– владение основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах; сформированность умения распознавать на чертежах, моделях и в реальном мире геометрические фигуры; применение изученных свойств геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием;

– сформированность представлений о необходимости доказательств при обосновании математических утверждений и роли аксиоматики в проведении дедуктивных рассуждений;

– сформированность понятийного аппарата по основным разделам курса математики; знаний основных теорем, формул и умения их применять; умения доказывать теоремы и находить нестандартные способы решения задач;

– сформированность умений моделировать реальные ситуации, исследовать построенные модели, интерпретировать полученный результат.

ВВЕДЕНИЕ В СТЕРЕОМЕТРИЮ

Предмет стереометрии. Аксиомы стереометрии. Некоторые следствия из аксиом.

1. Прочитать записи и сделать схематический рисунок.
а) $A \in \alpha,\ a \subset \alpha,\ A \notin a.$
б) $a \cap \alpha = A, b \cap \alpha = B.$

2. По рисунку 1 выберите верные утверждения.
а) $m \in \beta,\ F \in m,\ Q \notin m;$
б) $m \subset \beta,\ F \in m,\ Q \notin m;$
в) $m \not\subset \beta,\ F \in m,\ Q \notin m;$
г) $m \subset \beta,\ F \in m,\ Q \in m;$
д) $m \not\subset \beta, F \notin m,\ Q \in m.$

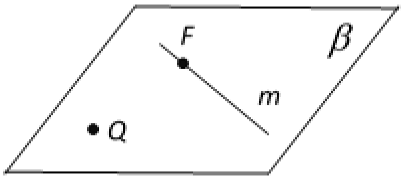
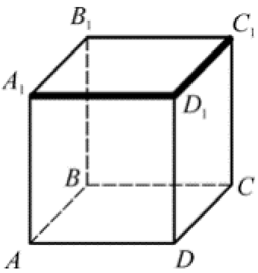
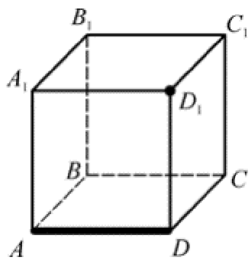
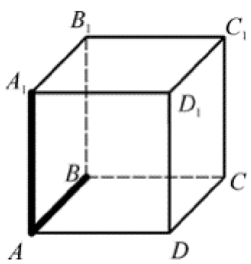


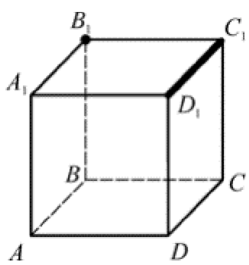
Рис. 1

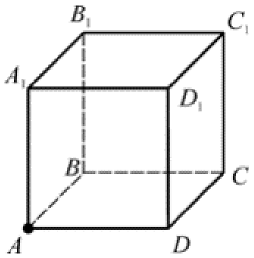
3. Сколько плоскостей, соответствующих граням куба, можно провести через выделенные элементы? Назовите эти плоскости.

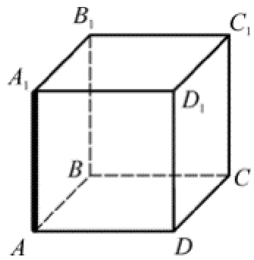
а)


б)


в)


г)


д) 

е) 

4. По рисунку 2:

а) назовите плоскости, в которых лежат прямые *PE, MK, DB, AB, EC;*

б) назовите точки пересечения прямой *DK* с плоскостью *(ABC),* прямой *CE* с плоскостью *(ADB)*;

в) назовите точки, лежащие в плоскостях *(ADB)* и *(DBC)*;

г) назовите прямые, по которым пересекаются плоскости *(ABC)* и *(DCB)*, *(ABD)* и *(CDA)*, (*PDG*) и (*ABC*).

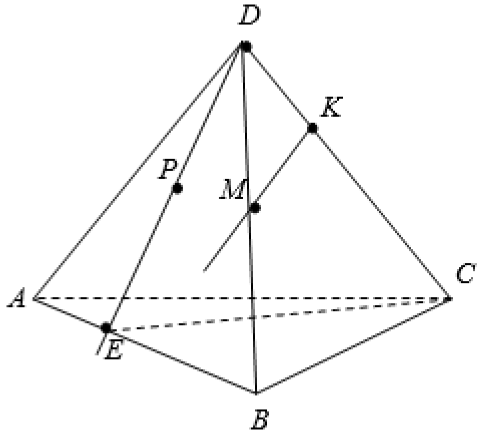


Рис. 2

5. По рисунку 3:

а) назовите, каким плоскостям принадлежат точки *A, P, C, M*;

б) назовите, каким плоскостям принадлежат прямые *AD*, *PD*, *PC*;

в) назовите, в какой точке пересекаются прямая *AD* и плоскость *(BDC), AB* и *(BDC), AB* и *(PDC), DM* и *(ABC)*;

г) назовите, по какой прямой пересекаются плоскости *(ABC)* и *(ADC), (ABD)* и *(PDC), (ABC)* и *(PDC).*

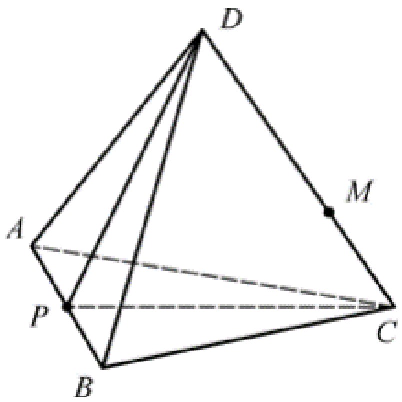


Рис. 3

6. По рисунку 4:

а) назовите точки, лежащие в плоскостях *(DCC₁)* и *(BQC)*;

б) назовите плоскости, в которых лежат прямая AA_1;

в) назовите точки пересечения прямой *MK* с плоскостью *(ABD),* прямых *DK* и *BP* с плоскостью $(A_1B_1C_1)$;

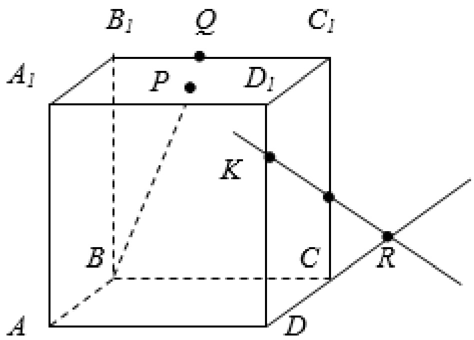


Рис. 4

г) назовите прямые, по которым пересекаются плоскости (AA_1B_1) и (ACD), (PB_1C_1) и (ABC);

д) назовите точки, пересечения прямых MK и DC, B_1C_1 и BP, C_1M и DC.

7. По рисунку 5:

а) назовите, каким плоскостям принадлежат точки K, L, M, N, Q;

б) назовите, каким плоскостям принадлежат прямые KL, QN, D_1M;

в) назовите, в какой точке пересекаются прямая KL и плоскость (DD_1C_1), DC и (BB_1C_1), QN и (BB_1C_1), QN и ($A_1B_1C_1$), MD_1 и (AA_1D_1);

г) назовите, по какой прямой пересекаются плоскости ($A_1B_1C_1$) и (DD_1C_1), (KLN) и ($A_1B_1C_1$), (KLN) и (DD_1C_1), (KLN) и (BB_1C_1).

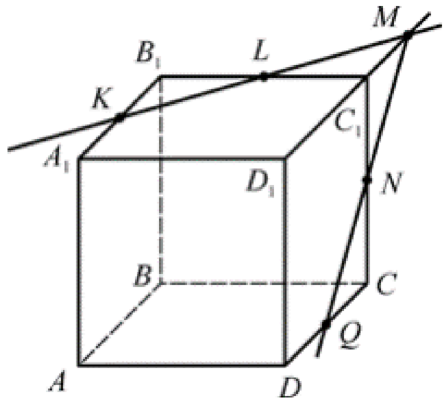
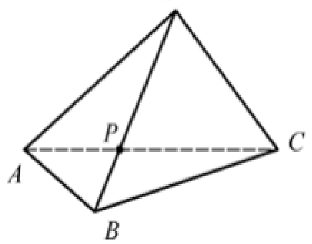


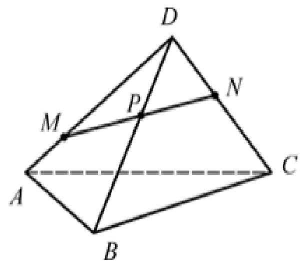
Рис. 5

8. Найдите ошибку в изображении. Обоснуйте ответ.

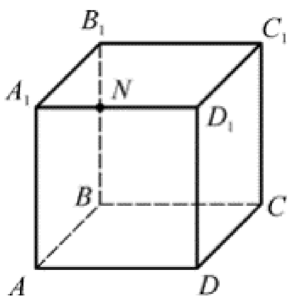
а)



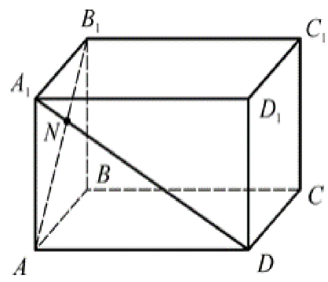
б)



в)



г)



9. Две прямые пересекаются в точке B. Доказать, что все прямые, которые пересекают данные прямые и не проходят через точку B, лежат в одной плоскости.

10. Верно ли утверждение:

а) если две точки окружности лежат в плоскости, то и вся окружность лежит в этой плоскости;

б) если три точки окружности лежат в плоскости, то и вся окружность лежит в этой плоскости?

11. Пусть точки A, B, C не лежат на одной прямой. Отметим на прямой AB точку D, а на прямой AC – точку E. Доказать, что точка F прямой DE лежит в плоскости ABC.

12. Пусть стороны AB и AC треугольника ABC лежат в плоскости α. Доказать, что и медиана AM лежит в плоскости α.

13. Три данные точки соединены попарно отрезками. Докажите, что все отрезки лежат в одной плоскости.

14. Верно ли, что прямая лежит в плоскости данного треугольника, если она:

а) пересекает две стороны треугольника;

б) проходит через одну из вершин треугольника?

15. Даны прямая и точка, не лежащая на этой прямой. Докажите, что все прямые, проходящие через данную точку и пересекающие данную прямую, лежат в одной плоскости.

16. Могут ли две плоскости иметь:

а) только одну общую точку;

б) только две общие точки;

в) только одну общую прямую?

17. Три прямые проходят через одну точку. Через каждые две из них проведена плоскость. Сколько всего проведено плоскостей?

18. Три прямые попарно пересекаются. Докажите, что они либо лежат в одной плоскости, либо имеют общую точку.

ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Параллельность прямой и плоскости. Параллельность плоскостей. Перпендикулярность прямой и плоскости. Перпендикуляр и наклонная. Угол между прямой и плоскостью. Двугранный угол. Угол между плоскостями. Перпендикулярность двух плоскостей.

Геометрические преобразования пространства: параллельный перенос, симметрия относительно плоскости.

Параллельное проектирование. Площадь ортогональной проекции. Изображение пространственных фигур.

19. По рисункам 6-8 назовите:

а) пары параллельных ребер;

б) пары скрещивающихся ребер.

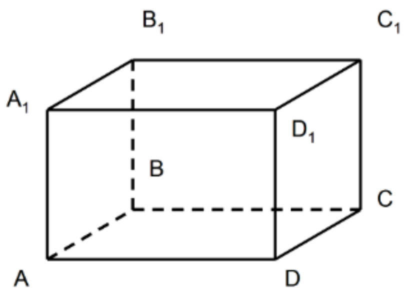


Рис. 6

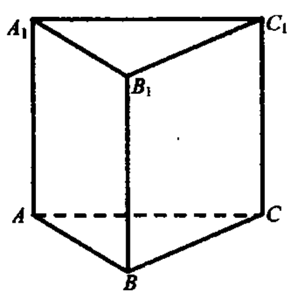


Рис. 7

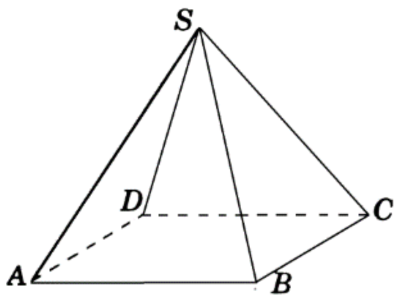


Рис. 8

20. На рисунке 9 *MN* – средняя линия треугольника *ABC*, $MN \cap \alpha = N$. Докажите, что $AC \cap \alpha$.

21. На рисунке 10 *ABCD* – параллелограмм, $AB \cap \alpha = M$. Докажите, что $DC \cap \alpha$.

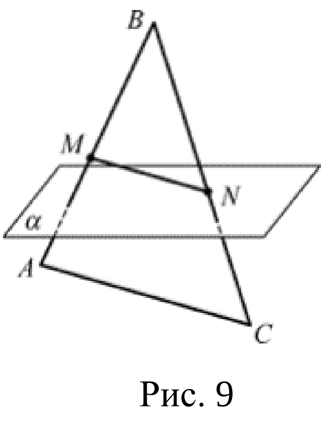


Рис. 9

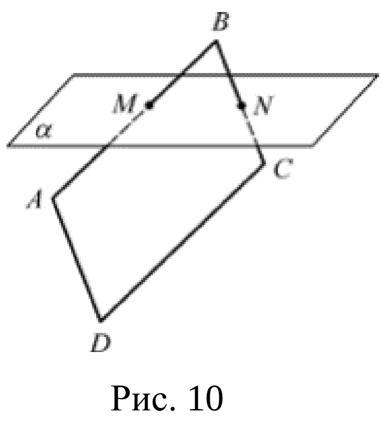


Рис. 10

22. Треугольник ABC и квадрат AEFC не лежат в одной плоскости (рисунок 11).

Пусть точки K и M – середины отрезков AB и BC соответственно, тогда:

а) докажите, что $KM \parallel EF$;

б) найдите KM, если AE=8 см.

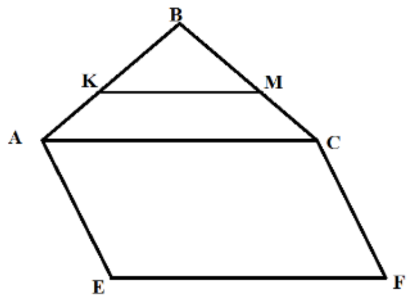


Рис. 11

23. Квадрат $ABCD$ и трапеция $KMNL$ не лежат в одной плоскости (рисунок 12). Пусть точки A и D – середины отрезков KM и NL соответственно.

а) Докажите, что $KL \parallel$ BC.

б) Найдите BC, если KL=10 см, MN=6 см.

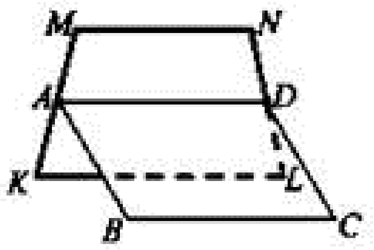


Рис. 12

24. Известно, что точки A, B, C и D лежат в одной плоскости. Определите, могут ли прямые AB и CD:

а) быть параллельными;

б) пересекаться;

в) быть скрещивающимися.

Ответы подтвердите ссылками на соответствующие факты.

25. Докажите:

а) $AB \dot{-} MN$ (рисунок 13);

б) $AB \dot{-} CD$ (рисунок 14).

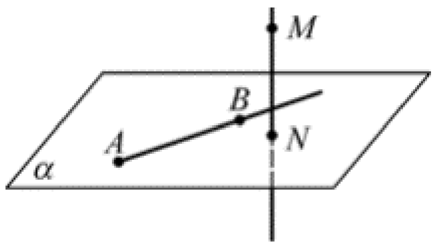


Рис. 13

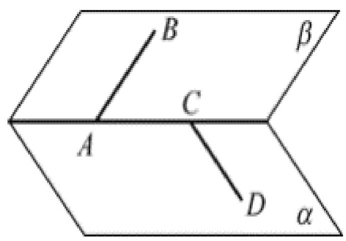


Рис. 14

26. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, $AB = \alpha$. Найдите расстояние между прямыми:

а) AB_1 и DC; б) AB_1 и CD_1;

в) AB и DB_1; г) A_1B и DB_1.

27. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми:

а) AC и BD; б) AA_1 и B_1C;

в) CC_1 и AD; г) BB_1 и A_1C.

28. Докажите, что $(ABC) \parallel (MNK)$ (ABC).

а) $MN \parallel AB, MK \parallel AC$ (рисунок 15)

б) $\angle ABM = \angle BMN, \angle NKB = \angle KBC$ (рисунок 16)

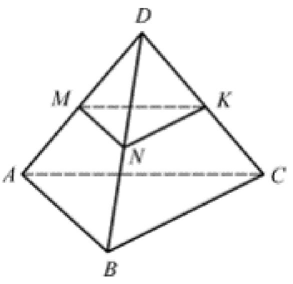


Рис. 15

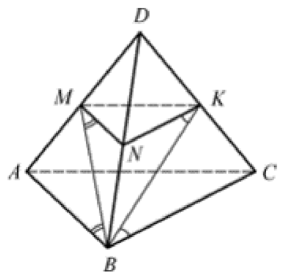


Рис. 16

29. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что:

а) $DC \perp B_1C_1$ и $AB \perp A_1D_1$, если $\angle BAD = 90^\circ$;

б) $AB \perp CC_1$ и $DD_1 \perp A_1B_1$, если $AB \perp DD_1$.

30. В тетраэдре $ABCD$ $BC \perp AD$. Докажите, что $AD \perp MN$, где M и N – середины ребер AB и AC.

31. На рисунке 17 ABC – треугольник. $BD \perp (ABC)$, $AB = BC$, $AM = MC$. Докажите, что $AC \perp (BDM)$.

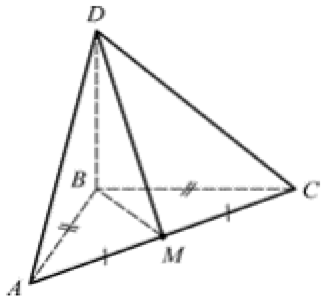


Рис. 17

32. На рисунке 18 ABC – треугольник. $BD \perp AB$, $BD \perp BC$, $AB = BC$. Докажите, что $BD \perp (ABC)$.

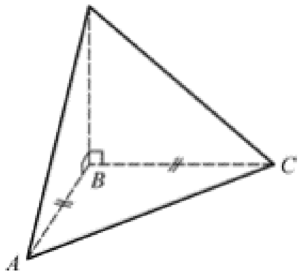


Рис. 18

33. . ABC – равносторонний треугольник (рисунок 19), AB=2, $BD \perp (ABC)$, $BD = \sqrt{6}$. Найдите S_{ADC}.

34. ABC – треугольник (рисунок 20), $AB = BC = 10$, $AC = 12$, $BD \perp (ABC)$, $BD = 6$.Найдите S_{ADC}.

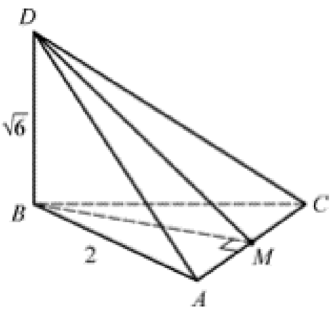


Рис. 19

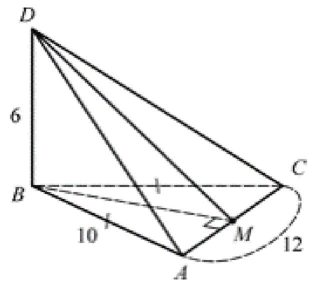


Рис. 20

35. Определите взаимное расположение прямых и плоскостей, проходящих через вершины куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рисунок 21).

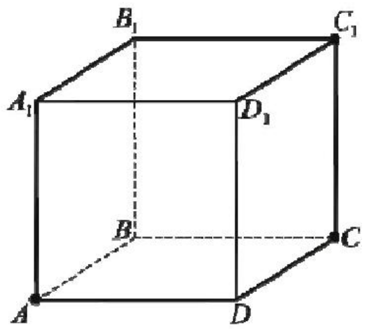


Рис. 21

а) CA и (DCB); BA_1 и (DCB); D_1A_1 и (DCB);
BC_1 и (DD_1C_1); B_1C и DC_1; DD_1 и CC_1;
BB_1 и DC; A_1B_1 и BC; (A_1BB_1) и (CDC_1)

б) CC_1 и (DCB); AA_1 и (DCB); D_1C_1 и (DCB);
B_1C_1 и (DD_1C_1); B_1C_1и DC_1; A_1D_1 и DC_1;
BB_1и AC; A_1B и BC; A_1B и DC_1.

в) CC_1 и (ABC); AA_1 и (DCC_1); D_1C_1 и (ABC);
B_1Cи (DD_1C_1); BC_1 и DC_1; A_1D_1 и DC;
BB_1 и AC; A_1Bи DC; (A_1BC)и (ADD_1).

г) CA_1 и (DCB); AA_1 и (DCB); D_1C_1 и (CBD);

B_1C_1 и (DD_1C_1); B_1C_1 и DC_1; A_1D_1 и DC_1;
BB_1 и AC; A_1B и BC; (AA_1B) и (DCC_1).

д) B_1C и DC_1; DD_1 и CC_1; BC_1 и (DD_1C_1);
BB_1 и DC; A_1B_1 и BC; (A_1BB_1) и (CDC_1);
CA и (DCB); BA_1 и (DCB); D_1A_1 и (DCB).

е) BB_1 и AC; A_1B и BC; (AA_1B) и (DD_1C_1);
CC_1 и (DCB); AA_1 и (DCB); D_1C_1 и (DCB);
B_1C_1 и (DD_1C_1); B_1C_1 и DC_1; A_1D_1 и DC_1.

36. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рисунок 22).

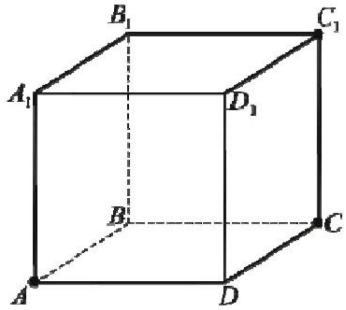


Рис. 22

а) найти все прямые и плоскости, проходящие через вершины куба перпендикулярно прямой AB;

б) найти все прямые и плоскости, проходящие через вершины куба перпендикулярно плоскости (ABC);

в) найти все прямые и плоскости, проходящие через вершины куба перпендикулярно прямой AD;

г) найти все прямые и плоскости, проходящие через вершины куба перпендикулярно плоскости (A_1AB);

д) найти все прямые и плоскости, проходящие через вершины куба перпендикулярно прямой A_1B_1;

е) найти все прямые и плоскости, проходящие через вершины куба перпендикулярно плоскости (ACD);

ж) найти все прямые и плоскости, проходящие через вершины куба перпендикулярно прямой CD;

з) найти все прямые и плоскости, проходящие через вершины куба перпендикулярно плоскости (AA_1B_1);

и) найти все прямые и плоскости, проходящие через вершины куба перпендикулярно прямой B_1C_1;

к) найти все прямые и плоскости, проходящие через вершины куба перпендикулярно плоскости (AA_1D_1).

37. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки до плоскости (рисунки 23-26):

а) по рисунку 23 от точки A до плоскости (CDD_1);

б) по рисунку 24 от точки A до плоскости (BCD_1);

в) по рисунку 25 от точки B до плоскости (ADD_1);

г) по рисунку 26 от точки B до плоскости (ACC_1).

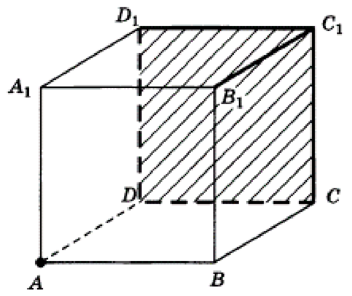


Рис. 23

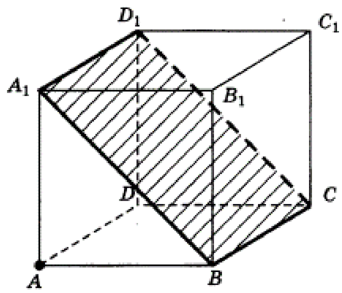


Рис. 24

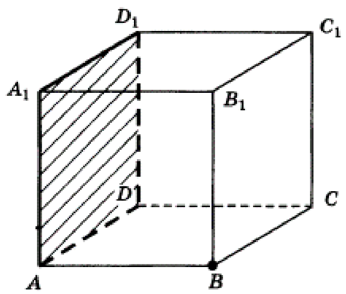


Рис. 25

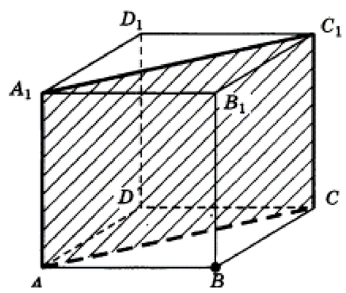


Рис. 26

38. AH – перпендикуляр к плоскости α. AB и AC – наклонные. Для каждого из предложенных рисунков 27-32 найдите соответствующее значение x.

а)

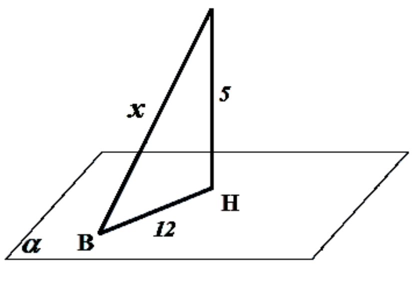


Рис. 27

б)

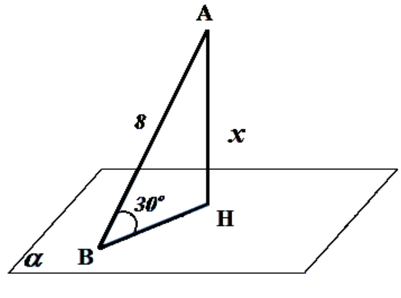


Рис. 28

в)

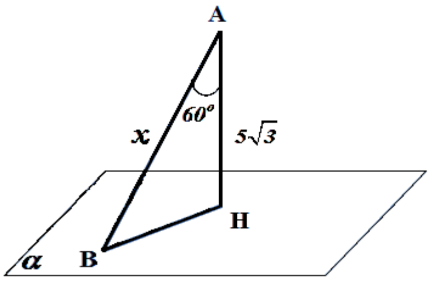


Рис. 29

г)

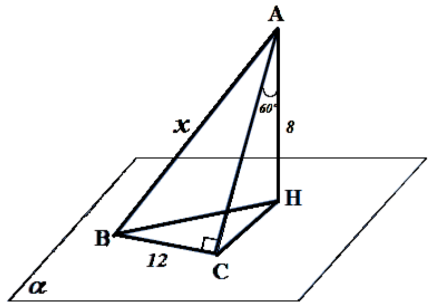


Рис. 30

д)

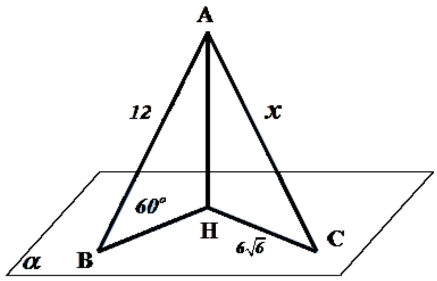


Рис. 31

е)

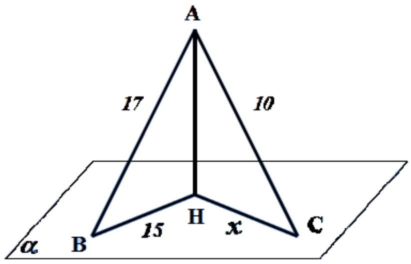


Рис. 32

39. $ABCD$ – прямоугольник, $FB \perp (ABC)$. Установите, перпендикулярны ли прямые α и b (рисунки 33-34).

а)

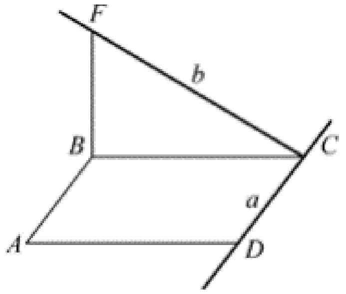


Рис. 33

б)

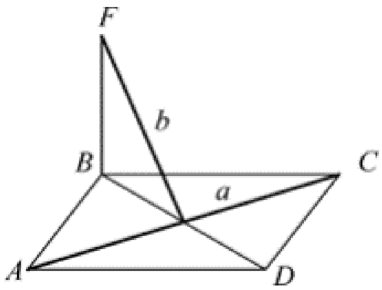


Рис. 34

40. Прямая a перпендикулярна плоскости (ABC).

а) пусть $ABCD$ – ромб (рисунок 35), тогда доказать, что $MO \perp BD$;

б) доказать по рисунку 36, что $AB = AC$;

в) пусть $ABCD$ – параллелограмм, тогда доказать, что $ABCD$ – прямоугольник (рисунок 37);

г) по рисунку 38 найти длину отрезка MB.

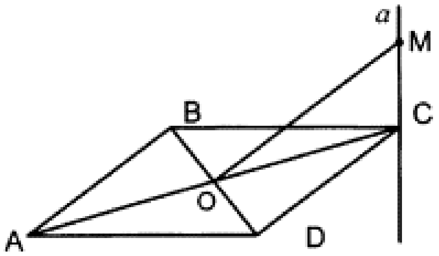


Рис. 35

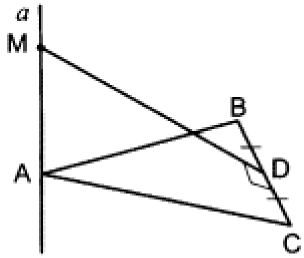


Рис. 36

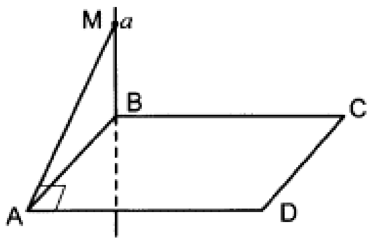


Рис. 37

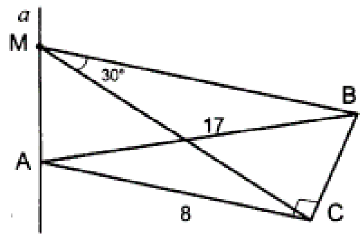


Рис. 38

41. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямой и плоскостью:

а) $\angle(AD_1,(DD_1C_1))$; б) $\angle(CC_1,(AB_1C_1))$;

в) $\angle(A_1B,(BCC_1))$; г) $\angle(BB_1,(A_1BC))$.

42. Из точек A и B, лежащих в двух перпендикулярных плоскостях, опущены перпендикуляры AC и BD на прямую пересечения плоскостей. Найдите длину отрезка AB, если:

а) $AC = 6$м, $BD = 7$м, $CD = 6$м;

б) $AC = 3$м, $BD = 4$м, $CD = 12$м;

в) $AD = 4$м, $BC = 7$м, $CD = 1$м;

г) $AD = BC = 5$м, $CD = 1$м;

д) $AC = a,\ CD = c, BD = b$;

е) $AD = a,\ BC = b, CD = c$.

МНОГОГРАННИКИ

Вершины, ребра, грани многогранника. Развертка. Многогранные углы. Выпуклые многогранники. Теорема Эйлера.

Призма. Прямая и наклонная призма. Правильная призма. Параллелепипед. Куб.

Пирамида. Правильная пирамида. Усеченная пирамида. Тетраэдр.

Симметрии в кубе, в параллелепипеде, в призме и пирамиде.

Сечения куба, призмы и пирамиды.

Представление о правильных многогранниках (тетраэдре, кубе, октаэдре, додекаэдре и икосаэдре)

43. Диагональ куба равна d см. Найдите площадь его поверхности.

а) $d = 1$; б) $d = 34$; в) $d = 37$;

г) $d = 41$; д) $d = 22$; е) $d = 9$.

44. Площадь поверхности куба равна S. Найдите его диагональ.

а) $S = 18$; б) $S = 200$; в) $S = 1568$;

г) $S = 242$; д) $S = 32$; е) $S = 648$.

45. Если каждое ребро куба увеличить на а, то его площадь поверхности увеличится на S. Найдите ребро куба.

а) $a = 1$, $S = 54$; б) $a = 9$, $S = 594$; в) $a = 2$, $S = 192$;

г) $a = 1$, $S = 30$; д) $a = 2$, $S = 144$; е) $a = 8$, $S = 576$;.

44. Во сколько раз увеличится площадь поверхности куба, если его ребро увеличить в k раз?

а) $k = 2$; б) $k = 23$; в) $k = 3$;

г) $k = 24$; д) $k = 17$; е) $k = 44$.

45. Найдите длины диагоналей, площадь диагонального сечения, площадь полной поверхности куба, ребро которого равно a. Построить куб и развертку куба.

а) a = 2 м; б) a = 20 см; в) a = 3 см;

г) a = 10 м; д) a = 15 см; е) a = 13 см.

46. Ящик, имеющий форму куба с ребром a см без одной грани, нужно покрасить со всех сторон снаружи. Найдите площадь поверхности, которую необходимо покрасить. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

а) $a = 10;$ б) $a = 15;$ в) $a = 30;$

г) $a = 20;$ д) $a = 25;$ е) $a = 9.$

47. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны a_1 и a_2. Площадь поверхности этого параллелепипеда равна S. Найдите третье ребро, выходящее из той же вершины.

а) $a_1 = 3; a_2 = 4; S = 94;$ б) $a_1 = 1; a_2 = 4; S = 348;$

в) $a_1 = 1; a_2 = 6; S = 138;$ г) $a_1 = 1; a_2 = 5; S = 94;$

д) $a_1 = 2; a_2 = 6; S = 136;$ е) $a_1 = 3; a_2 = 8; S = 246.$

48. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны a_1 и a_2. Площадь поверхности параллелепипеда равна S. Найдите его диагональ.

а) $a_1 = 1; a_2 = 2; S = 16;$ б) $a_1 = 32; a_2 = 42; S = 6240;$

в) $a_1 = 4; a_2 = 12; S = 192;$ г) $a_1 = 6; a_2 = 12; S = 576;$

д) $a_1 = 24; a_2 = 6; S = 768;$ е) $a_1 = 36; a_2 = 9; S = 1728.$

49. Найдите длины диагоналей, площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда с ребрами a, b, c. Построить развертку полной поверхности параллелепипеда.

а) a = 1 см, b = 3 см, c = 4 см; б) a = 1 см, b = 3 см, c = 4 см;

в) a = 5 см, b = 7 см, c = 6 см; г) a = 10 см, b = 3 см, c = 9 см;

д) a = 4 см, b = 8 см, c = 9 см; е) a = 7 см, b = 4 см, c = 5 см.

50. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $BD_1 = 5;\ CC_1 = 3;\ B_1C_1 = \sqrt{7}$. Найдите длину ребра AB.

51. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $CA_1 = \sqrt{38};\ DD_1 = 5;\ BC = 3.$ Найдите длину ребра BA.

52. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $DB_1 = \sqrt{26};\ AA_1 = 1;\ C_1B_1 = 3.$ Найдите длину ребра CD.

53. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $BD_1 = 6$; $CC_1 = 2$; $AD = \sqrt{7}$. Найдите длину ребра D_1C_1.

54. Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, сторона основания которой равна a, а высота – h.

а) $a = 2\ см, h = 10\ см$; б) $a = 5\ см, h = 5\ см$;

в) $a = 3\ см, h = 10\ см$; г) $a = 6\ см, h = 2\ см$;

д) $a = 3\ см, h = 7\ см$; е) $a = 9\ см, h = 10\ см.$

55. Найти площадь полной поверхности правильной треугольной призмы, у которой каждое ребро равно a. Построить развертку полной поверхности призмы.

а) $a = 2\ см$; б) $a = 20\ см$; в) $a = 3\ см$;

г) $a = 10\ м$; д) $a = 15\ см$; е) $a = 13\ см.$

56. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами a и b, высота призмы равна h. Найдите площадь ее поверхности.

а) $a = 6, b = 8, h = 10$; б) $a = 5, b = 12, h = 8$;

в) $a = 7, b = 24, h = 15$; г) $a = 3, b = 4, h = 8$;

д) $a = 9, b = 12, h = 14$; е) $a = 3, b = 4, h = 7$.

57. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами a и b. Площадь ее поверхности равна S. Найдите высоту призмы.

а) $a = 15, b = 20, S = 1380$; б) $a = 12, b = 16, S = 864$;

в) $a = 10, b = 24, S = 1140$; г) $a = 7, b = 24, S = 952$.

58. Найдите боковое ребро правильной четырехугольной призмы, если сторона ее основания равна a, а площадь поверхности равна S.

а) $a = 20, S = 1760$; б) $a = 3, S = 66$;

в) $a = 30, S = 2760$; г) $a = 15, S = 930$;

д) $a = 8, S = 416$; е) $a = 12, S = 576$.

59. Найдите площадь поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными d_1 и d_2, и боковым ребром, равным h.

а) $d_1 = 6, d_2 = 8, h = 10$; б) $d_1 = 3, d_2 = 4, h = 5$;

в) $d_1 = 9, d_2 = 40, h = 55;$ г) $d_1 = 5, d_2 = 12, h = 17;$

д) $d_1 = 25, d_2 = 60, h = 25;$ е) $d_1 = 5, d_2 = 12, h = 16.$

60. В основании прямой призмы лежит ромб с диагоналями, равными d_1 и d_2. Площадь ее поверхности равна S. Найдите боковое ребро этой призмы.

а) $d_1 = 16, d_2 = 30, S = 2588;$ б) $d_1 = 15, d_2 = 36, S = 2100;$
в) $d_1 = 40, d_2 = 42, S = 7132;$ г) $d_1 = 20, d_2 = 21, S = 3030.$

61. В правильной n – угольной призме сторона основания равна a и высота равна h. Вычислите площади боковой и полной поверхности призмы.

а) $n = 3, a = 10\,см, h = 15\,см;$ б) $n = 4, a = 12\,дм, h = 8\,дм;$

в) $n = 6, a = 23\,см, h = 5\,дм;$ г) $n = 5, a = 0{,}4\,м, h = 10\,см.$

62. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O – центр основания, S – вершина, SO – высота, AC – диагональ четырехугольника $ABCD$. Найдите боковое ребро SA.

а) $SO = 54, AC = 144;$

б) $SO = 35, AC = 168;$

в) $SO = 20, AC = 42.$

63. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O – центр основания, S – вершина, SO – высота, BD – диагональ четырехугольника $ABCD$. Найдите боковое ребро SC.

а) $SO = 9, BD = 24;$

б) $SO = 64, BD = 96;$

в) $SO = 96, BD = 56.$

64. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка L – середина ребра AC, S – вершина. Известно, что BC – ребро основания, а SL – апофема. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

а) $BC = 6, SL = 5;$

б) $BC = 7, SL = 16;$

в) $BC = 4, SL = 21.$

65. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка M – середина ребра AB, S – вершина. Известно, что BC – ребро основания, а $S_{бок}$ – площадь боковой поверхности пирамиды. Найдите длину отрезка SM.

а) $BC = 3, S_{бок} = 45;$

б) $BC = 7, S_{бок} = 42;$

в) $BC = 1, S_{бок} = 3.$

66. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка K – середина ребра BC, S – вершина. Известно, что SK – апофема, а $S_{бок}$ – площадь боковой поверхности пирамиды. Найдите длину ребра AC.

а) $SK = 4, S_{бок} = 54;$

б) $SK = 7, S_{бок} = 63;$

в) $SK = 2, S_{бок} = 3.$

67. Стороны основания правильной четырехугольной пирамиды равны a, боковые ребра равны – b. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.

а) $a = 10, b = 13;$ б) $a = 6, b = 5;$ в) $a = 42, b = 75;$

г) $a = 24, b = 13;$ д) $a = 84, b = 58;$ е) $a = 30, b = 17.$

68. Найдите апофему, высоту, площадь полной поверхности правильной четырехугольной пирамиды, у которой каждое ребро равно a . Построить пирамиду и развертку полной поверхности пирамиды.

а) $a = 22\,см;$ б) $a = 20\,см;$ в) $a = 3\,см;$

г) $a = 10\,м;$ д) $a = 15\,см;$ е) $a = 13\,см.$

69. Стороны оснований правильной усеченной четырехугольной пирамиды $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны 3 см и 9 см. Высота пирамиды равна 4 см. Найти площадь боковой поверхности.

70. Правильная треугольная пирамида $PABC$ с высотой $PH = 8\,см$ и стороной основания равной $12\sqrt{3}$ см рассечена плоскостью $A_1B_1C_1$, проходящей через середину H_1 высоты PH параллельно основанию ABC. Найти площадь боковой поверхности полученной усеченной пирамиды.

71. Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунках 39-44 (все двугранные углы прямые).

а)

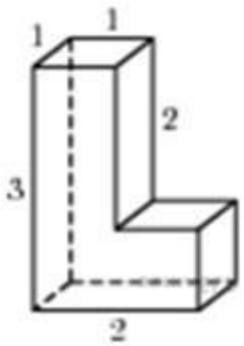


Рис. 39

б)

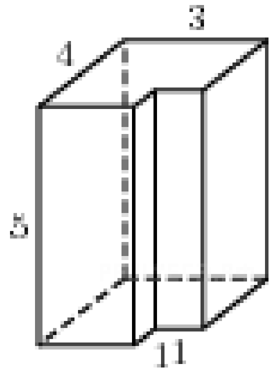


Рис. 40

в)

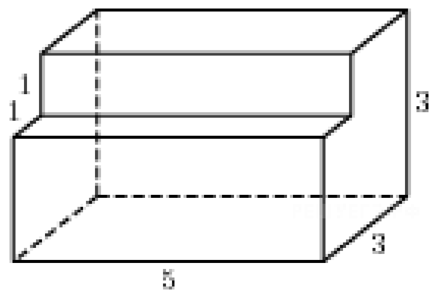


Рис. 41

г)

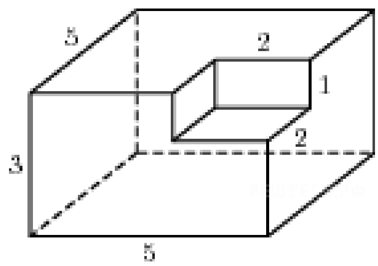


Рис. 42

д)

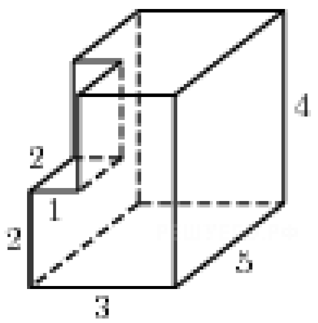


Рис. 43

е)

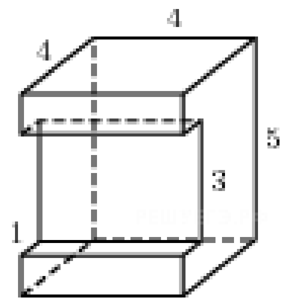


Рис. 44

72. Построить сечение тетраэдра (рисунки 45-60) плоскостью, проходящей через точки M, N, P.

а)

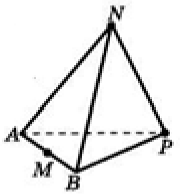


Рис. 45

б)

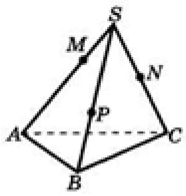


Рис. 46

в)

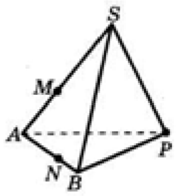


Рис. 47

г)

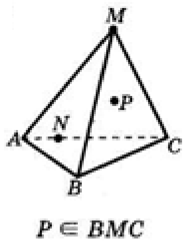


Рис. 48

д)

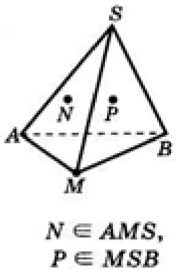


Рис. 49

е)

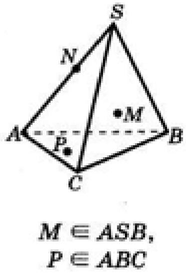


Рис. 50

ж)

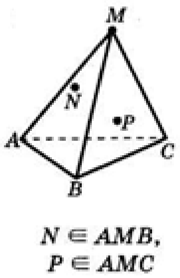


Рис. 51

з)

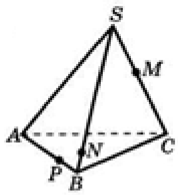


Рис. 52

и)

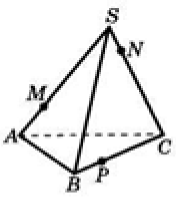


Рис. 53

к)

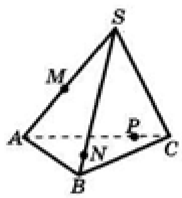


Рис. 54

л)

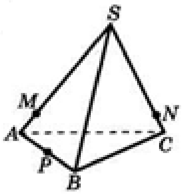


Рис. 55

м)

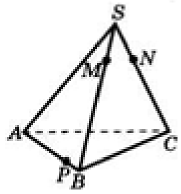


Рис. 56

н)

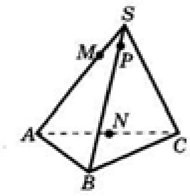


Рис. 57

о)

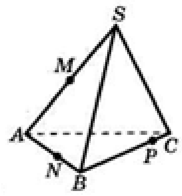


Рис. 58

п)

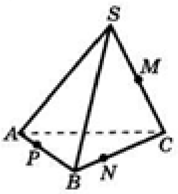


Рис. 59

р)

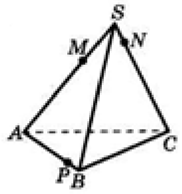


Рис. 60

73. Построить сечение параллелепипеда (рисунки 61-74) плоскостью, проходящей через точки M, N, P.

а)

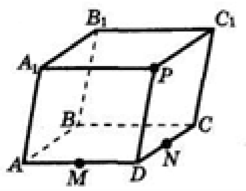


Рис. 61

б)

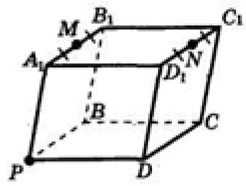


Рис. 62

в)

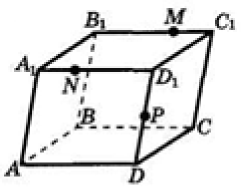


Рис. 63

г)

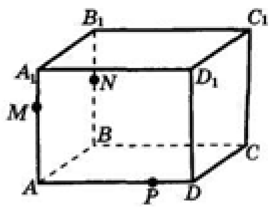


Рис. 64

д)

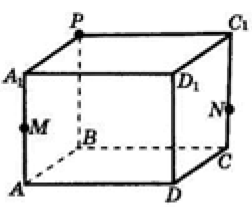


Рис. 65

е)

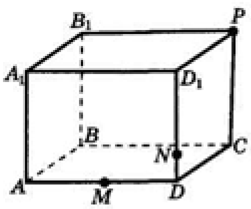


Рис. 66

ж)

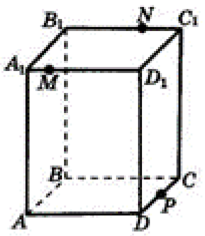


Рис. 67

з)

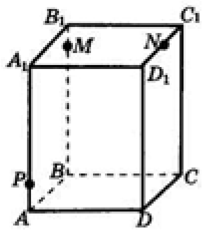


Рис. 68

и)

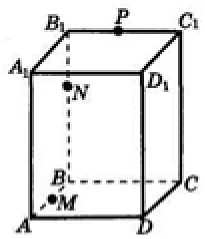


Рис. 69

к)

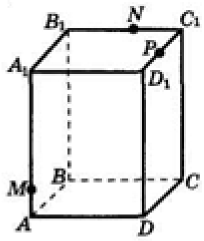


Рис. 70

л)

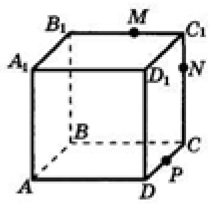


Рис. 71

м)

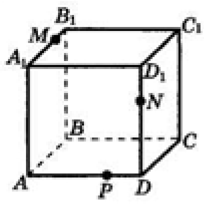


Рис. 72

н)

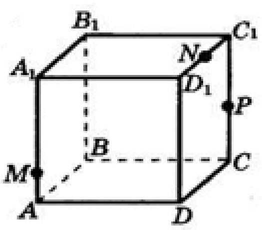


Рис. 73

о)

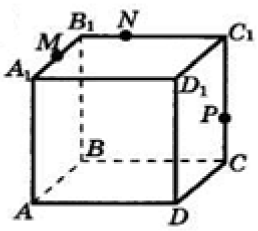
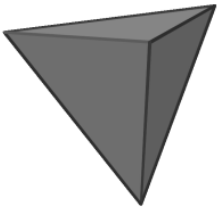
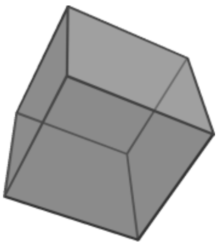
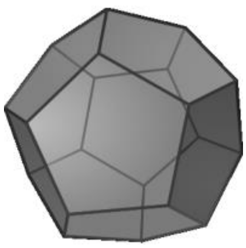
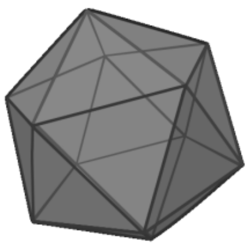


Рис. 74

74. Заполнить таблицу «Сравнительная характеристика правильных многогранников».

Внешний вид многогранника	Название	Форма грани	Число рёбер	Число граней	Число вершин	Число ребер, сходящихся в 1 вершине
						
						
						
						
						

ТЕЛА И ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

Цилиндр и конус. Усеченный конус. Основание, высота, боковая поверхность, образующая, развертка. Осевые сечения и сечения, параллельные основанию.

Шар и сфера, их сечения. Касательная плоскость к сфере.

75. Радиус основания цилиндра равен r, высота равна h. Найти площадь основания, боковую поверхность, полную поверхность.

а) $r=2, h=3;$ б) $r=7, h=10;$ в) $r=3, h=6;$
г) $r=10, h=3;$ д) $r=7, h=2;$ е) $r=6, h=5.$

76. Длина окружности основания цилиндра равна C, высота равна h. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра – $S_{бок}$.

а) $C=3, h=2;$ б) $C=3, h=4;$ в) $C=5, h=2;$
г) $C=3, h=6;$ д) $C=5, h=4;$ е) $C=6, h=3.$

77. Длина окружности основания цилиндра равна C. Площадь боковой поверхности равна $S_{бок}$. Найдите высоту цилиндра.

а) $C=14, S_{бок}=182;$ б) $C=2, S_{бок}=28;$ в) $C=1, S_{бок}=13;$
г) $C=11, S_{бок}=121;$ д) $C=15, S_{бок}=90;$ е) $C=7, S_{бок}=7.$

78. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $S_{бок}$, а высота – h. Найдите диаметр основания.

а) $h=1, S_{бок}=2\pi;$ б) $h=2, S_{бок}=12\pi;$ в) $h=8, S_{бок}=64\pi;$
г) $h=4, S_{бок}=40\pi;$ д) $h=7, S_{бок}=56\pi;$ е) $h=8, S_{бок}=80\pi.$

79. Найдите площадь осевого сечения, площадь полной поверхности цилиндра, высота которого равна h, а радиус основания равен r. Сделать рисунок.

а) $h=10\,см, r=40\,см;$ б) $h=10\,см, r=4\,см;$
в) $h=50\,см, r=60\,см;$ г) $h=10\,см, r=9\,см;$
д) $h=40\,см, r=90\,см;$ е) $h=70\,см, r=50\,см.$

80. Высота конуса равна h, а диаметр основания – d. Найдите образующую конуса.

а) $h=8, d=30;$ б) $h=5, d=24;$ в) $h=15, d=16;$
г) $h=6, d=16;$ д) $h=12, d=10;$ е) $h=21, d=144.$

81. Высота конуса равна h, а длина образующей – l. Найдите диаметр основания конуса.

а) $h=4, l=5;$ б) $h=57, l=95;$ в) $h=96, l=100;$
г) $h=64, l=80;$ д) $h=30, l=34;$ е) $h=25, l=65.$

82. Диаметр основания конуса равен d, а длина образующей – l. Найдите высоту конуса.

а) $d=120, l=65;$ б) $d=40, l=52;$ в) $d=126, l=87;$
г) $d=120, l=68;$ д) $d=48, l=25;$ е) $d=78, l=89.$

83. Найдите образующую, площадь осевого сечения, площадь основания, площадь боковой поверхности, площадь полной поверхности конуса, высота которого равна h, а радиус основания равен r. Построить конус и развертку его полной поверхности.

а) $h=50$ см, $r=40$ см; б) $h=10$ см, $r=40$ см;
в) $h=60$ см, $r=40$ см; г) $h=9$ см, $r=8$ см;
д) $h=70$ см, $r=90$ см; е) $h=27$ см, $r=5$ см.

84. Во сколько раз увеличится площадь боковой поверхности конуса, если его образующую увеличить в k раз?

а) $k=2;$ б) $k=5;$ в) $k=28;$
г) $k=4;$ д) $k=16;$ е) $k=38.$

85. Во сколько раз уменьшится площадь боковой поверхности конуса, если радиус его основания уменьшится в k раза, а образующая останется прежней?

а) $k=1{,}5;$ б) $k=15;$ в) $k=8;$
г) $k=28;$ д) $k=19;$ е) $k=40.$

86. Найдите высоту, площадь осевого сечения, площадь боковой поверхности усеченного конуса, образующая которого равна l, а радиусы оснований равны r и R.

а) $r=6, R=12, l=14;$ б) $r=3, R=7, l=5;$
в) $r=5, R=11, l=10;$ г) $r=3, R=6, l=5.$

87. Напишите уравнение сферы радиуса R с центром A.

а) $A(2;-4;7), R=3;$ б) $A(0;0;0), R=\sqrt{2};$
в) $A(2;0;0), R=4;$ г) $A(0;1;-2), R=\sqrt{3};$
д) $A(3;-2;0), R=\sqrt{5};$ е) $A(2;0;-1), R=7.$

88. Напишите уравнение сферы с центром A, проходящей через точку N.

а) $A(-2;2;0), N(5;0;-1);$ б) $A(-2;2;0), N(0;0;0);$

в) $A(0;0;0)$, $N(5;3;1)$; г) $A(1;7;3)$, $N(-3;5;-2)$;
д) $A(1;-4;0)$, $N(3;-2;7)$; е) $A(0;3;6)$, $N(2;3;5)$.

89. Найдите площадь сферы, радиус которой равен R.
а) $R = 6\,см$; б) $R = 2\,дм$;
в) $R = 7\,м$; г) $R = 4\,см$;
д) $R = \sqrt{6}\,м$; е) $R = 2\sqrt{3}\,см$.

90. Площадь сферы равна S см^2. Найдите радиус сферы.
а) $S = 324$; б) $S = 124$;
в) $S = 1024\pi$; г) $S = 64\pi$.

91. Во сколько раз увеличится площадь поверхности шара, если радиус шара увеличить в k раз?
а) $k = 2$; б) $k = 5$; в) $k = 28$;
г) $k = 4$; д) $k = 16$; е) $k = 38$.

92. Шар радиуса 41 дм пересечен плоскостью, находящейся на расстоянии 9 дм от центра. Найдите площадь сечения.

93. Вершины треугольника ABC лежат на сфере радиуса 13 см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если $AB = 6\,см$, $BC = 8\,см$, $AC = 10\,см$.

94. Вершины прямоугольника лежат на сфере радиуса 10 см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости прямоугольника, если его диагональ равна 16 см.

95. Расстояние от центра шара радиуса R до секущей плоскости равно d. Вычислите:
а) площадь S сечения, если $R = 12\,см$, $d = 8\,см$;
б) R, если площадь сечения равна 12 см^2, $d = 2\,см$.

ИЗМЕРЕНИЯ В ГЕОМЕТРИИ

Объем и его измерение. Интегральная формула объема.

Формулы объема куба, прямоугольного параллелепипеда, призмы, цилиндра. Формулы объема пирамиды и конуса. Формулы площади поверхностей цилиндра и конуса. Формулы объема шара и площади сферы.

Подобие тел. Отношения площадей поверхностей и объемов подобных тел.

96. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, стороны основания которого равны a и b, а высота равна h.

а) $a=11, b=12, h=15;$ б) $a=3\sqrt{2}, b=\sqrt{5}, h=10\sqrt{10};$

в) $a=18, b=5\sqrt{3}, h=13;$ г) $a=3\frac{1}{3}, b=\sqrt{5}, h=0{,}96.$

97. Аквариум имеет форму прямоугольного параллелепипеда с размерами a см × b см × c см. Сколько литров составляет объём аквариума? В одном литре 1000 кубических сантиметров.

а) 60 см × 20 см × 50 см; б) 50 см × 40 см × 40 см;

в) 60 см × 30 см × 40 см; г) 70 см × 20 см × 60 см;

д) 80 см × 30 см × 40 см; е) 90 см × 70 см × 60 см.

98. Два ребра прямоугольного параллелепипеда равны a и b, а объём параллелепипеда равен V. Найдите площадь поверхности этого параллелепипеда.

а) $a=6, b=4, V=240;$ б) $a=8, b=2, V=144;$

в) $a=4, b=3, V=180;$ г) $a=7, b=4, V=140;$

д) $a=12, b=6, V=144;$ е) $a=10, b=2, V=100.$

99. Найдите объем правильной треугольной призмы, если сторона её основания равна a, а боковое ребро h.

а) $a=6, h=7;$ б) $a=8, h=6;$

в) $a=4, h=4\sqrt{3};$ г) $a=7, h=12.$

100. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами a и b, боковое ребро равно h. Найдите объем призмы.

а) $a=5, b=7, h=4;$ б) $a=5, b=6, h=6;$

в) $a=6, b=8, h=4;$ г) $a=3, b=4, h=6;$

д) $a=4, b=6, h=5;$ е) $a=6, b=8, h=5.$

101. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами a и b. Объем призмы равен V. Найдите ее боковое ребро.

а) $a=3, b=5, V=30;$ б) $a=2, b=3, V=18;$
в) $a=2, b=7, V=42;$ г) $a=5, b=8, V=80;$
д) $a=4, b=5, V=50;$ е) $a=2, b=5, V=30.$

102. Найдите объем цилиндра, если радиус его основания равен r, а высота h.

а) $r=6, h=8;$ б) $r=2, h=5;$ в) $r=2\sqrt{2}, h=3;$
г) $r=2, h=6;$ д) $r=2{,}5, h=5;$ е) $r=2\sqrt{3}, h=12.$

103. Найдите радиус основания цилиндра, если его объем равен V, а его высота h.

а) $h=7, V=567\pi;$ б) $h=3{,}6, V=120\pi;$
в) $h=3, V=27\pi;$ г) $h=4, V=36\pi.$

104. Пусть V, r и h соответственно объем, радиус и высота цилиндра. Найдите:

а) V, если $r=2\sqrt{2}\ см, h=3\ см;$

б) r, если $V=120\ см^3, h=3{,}6\ см;$

в) h, если $r=h, V=8\pi\ см^3.$

105. Найдите объем пирамиды, высота которой равна h, а основание – прямоугольник со сторонами a и b.

а) $h=6, a=3, b=4;$ б) $h=3, a=5, b=3;$
в) $h=5, a=7, b=6;$ г) $h=4, a=8, b=3;$
д) $h=1, a=5, b=3;$ е) $h=6, a=7, b=3.$

106. Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами a и b. Ее объем равен V. Найдите высоту этой пирамиды.

а) $a=4, b=5, V=80;$ б) $a=2, b=8, V=48;$
в) $a=4, b=6, V=48;$ г) $a=4, b=8, V=64;$
д) $a=5, b=6, V=40;$ е) $a=6, b=8, V=96.$

107. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны a, а высота равна h.

а) $a=1, h=\sqrt{3};$ б) $a=3, h=6\sqrt{3};$
в) $a=2, h=4\sqrt{3};$ г) $a=11, h=2\sqrt{3};$

д) $a=9, h=2\sqrt{3}$; е) $a=5, h=4\sqrt{3}$.

108. Найдите высоту правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны a, а объем равен V.

а) $a=2, V=\sqrt{3}$; б) $a=4, V=5\sqrt{3}$;

в) $a=8, V=4\sqrt{3}$; г) $a=10, V=4\sqrt{3}$;

д) $a=12, V=12\sqrt{3}$; е) $a=6, V=6\sqrt{3}$.

109. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна a, боковое ребро равно c. Найдите объем пирамиды.

а) $a=2, c=4$; б) $a=1, c=2$;

в) $a=8, c=16$; г) $a=6, c=12$;

д) $a=11, c=22$; е) $a=10, c=20$.

110. Объем правильной шестиугольной пирамиды V. Сторона основания равна a. Найдите боковое ребро.

а) $a=12, V=2592$; б) $a=9, V=1093{,}5$;

в) $a=6, V=324$; г) $a=4, V=96$;

д) $a=3, V=40{,}5$; е) $a=8, V=768$.

111. Найдите объем конуса, высота которого равна h, а радиус основания – r.

а) $h=12, r=5$; б) $h=8, r=6$;

в) $h=6, r=2$; г) $h=12, r=10$;

д) $h=4, r=3$; е) $h=15, r=8$.

112. Высота конуса равна h, образующая равна l. Найдите его объем, деленный на π.

а) $h=6, l=10$; б) $h=3, l=9$;

в) $h=3, l=6$; г) $h=4, l=10$;

д) $h=12, l=14$; е) $h=2, l=4$.

113. Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объем цилиндра, если объем конуса равен V.

а) $V=40$; б) $V=25$; в) $V=23$;

г) $V=27$; д) $V=18$; е) $V=14$.

114. Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Найдите объем конуса, если объем цилиндра равен V.

а) $V=150$; б) $V=114$; в) $V=63$;

г) $V=45$; д) $V=159$; е) $V=129$.

115. Конус вписан в цилиндр. Объем конуса равен V. Найдите объем цилиндра.

а) $V=5$; б) $V=50$; в) $V=16$;
г) $V=57$; д) $V=18$; е) $V=41$.

116. Цилиндр описан около шара. Объем цилиндра равен V. Найдите объем шара.

а) $V=33$; б) $V=105$; в) $V=6$;
г) $V=72$; д) $V=9$; е) $V=69$.

117. Цилиндр описан около шара. Объем шара равен V. Найдите объем цилиндра.

а) $V=24$; б) $V=20$; в) $V=88$;
г) $V=70$; д) $V=60$; е) $V=72$.

118. Радиусы трех шаров равны r_1, r_2 и r_3. Найдите радиус шара, объем которого равен сумме их объемов.

а) $r_1=6, r_2=8, r_3=10$; б) $r_1=1, r_2=6, r_3=8$;
в) $r_1=2, r_2=12, r_3=16$; г) $r_1=15, r_2=20, r_3=25$.

119. Во сколько раз увеличится объем шара, если его радиус увеличить в k раз?

а) $k=3$; б) $k=5$; в) $k=10$;
г) $k=15$; д) $k=4$; е) $k=11$.

120. Объем одного шара в k раз больше объема второго. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго?

а) $k=27$; б) $k=1331$; в) $k=216$;
г) $k=1000$; д) $k=2197$; е) $k=512$.

121. Объем шара равен V. Найдите площадь его поверхности, деленную на π.

а) $V=288\pi$; б) $V=12348\pi$;
в) $V=18432\pi$; г) $V=26244\pi$.

122. Найдите объем многогранника, изображенного на рисунках 75-80 (все двугранные углы многогранника прямые).

а)

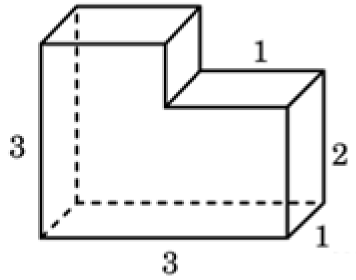


Рис. 75

б)

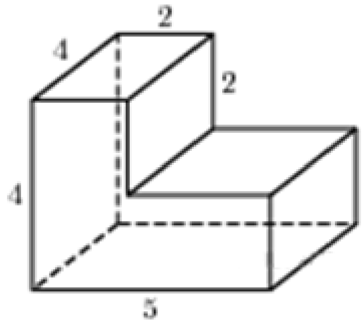


Рис. 76

в)

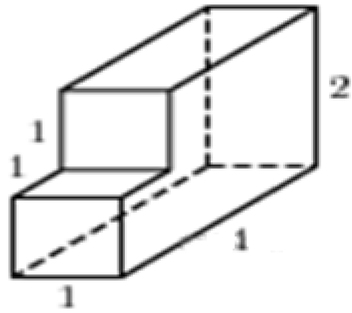


Рис. 77

г)

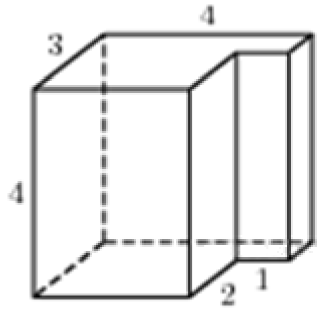


Рис. 78

д)

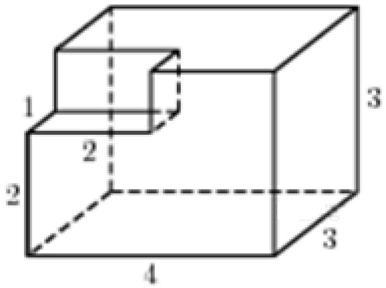


Рис. 79

е)

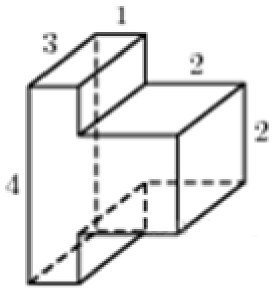


Рис. 80

КООРДИНАТЫ И ВЕКТОРЫ

Прямоугольная (декартова) система координат в пространстве. Формула расстояния между двумя точками. Уравнения сферы, плоскости и прямой.

Векторы. Модуль вектора. Равенство векторов. Сложение векторов. Умножение вектора на число. Разложение вектора по направлениям. Угол между двумя векторами. Проекция вектора на ось. Координаты вектора. Скалярное произведение векторов.

Использование координат и векторов при решении математических и прикладных задач.

123. Даны точки $A(3;-1;0)$, $B(0;0;-7)$, $C(2;0;0)$, $D(-4;0;3)$, $E(0;-1;0)$, $F(1;2;3)$, $G(0;5;-7)$, $H(-\sqrt{5};\sqrt{3};0)$. Какие из этих точек лежат на:

а) оси абсцисс;

б) оси ординат;

в) оси аппликат;

г) плоскости Oxy;

д) плоскости Oyz;

е) плоскости Oxz.

124. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$. Найдите координаты четвертой вершины:

а) $A(1;0;1), B(-1;5;0), C(2;6;0)$;

б) $A(2;0;1), B(-2;5;3), C(1;3;0)$;

в) $A(1;0;2), B(-1;5;1), C(2;4;1)$;

г) $A(1;0;1), B(-1;5;0), C(1;3;0)$;

д) $A(1;-1;1), B(-1;4;0), C(1;2;0)$;

е) $A(2;0;1), B(0;5;0), C(2;3;0)$.

125. Запишите координаты векторов:

а) $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}-5\vec{k}$;

б) $\vec{b}=-5\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$;

в) $\vec{c}=\vec{i}-\vec{j}$;

г) $\vec{d}=\vec{j}+\vec{k}$;

д) $\vec{m}=\vec{k}-\vec{i}$;

е) $\vec{n}=0,7\vec{k}$.

126. Даны векторы $\vec{a}\{5;-1;2\}$, $\vec{b}\{-3;-1;0\}$, $\vec{c}\{0;-1;0\}$, $\vec{d}\{0;0;0\}$. Запишите разложения этих векторов по координатным векторам $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

127. Даны векторы $\vec{a}\{3;-5;2\}$, $\vec{b}\{0;7;-1\}$, $\vec{c}\left\{\dfrac{2}{3};0;0\right\}$, $\vec{d}\{-2,7;3,1;0,5\}$.

Найдите координаты векторов:

а) $\vec{a}+\vec{b}$;

б) $\vec{a}+\vec{c}$;

в) $\vec{b}+\vec{c}$; г) $\vec{d}+\vec{b}$;

д) $\vec{d}+\vec{a}$; е) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$;

ж) $\vec{b}+\vec{a}+\vec{d}$; з) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$.

128. Даны векторы $\vec{a}\{5;-1;1\}$, $\vec{b}\{-2;1;0\}$, $\vec{c}\{0;0,2;0\}$, $\vec{d}\left\{-\frac{1}{3};2\frac{2}{5};-\frac{1}{7}\right\}$. Найдите координаты векторов:

а) $\vec{a}-\vec{b}$; б) $\vec{b}-\vec{a}$;

в) $\vec{a}-\vec{c}$; г) $\vec{d}-\vec{a}$;

д) $\vec{c}-\vec{d}$; е) $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$;

ж) $\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$; з) $2\vec{a}$;

и) $-3\vec{b}$; к) $-6\vec{c}$;

л) $-\frac{1}{3}\vec{d}$; м) $0,2\vec{b}$.

129. Даны векторы $\vec{a}\{-1;1;1\}$, $\vec{b}\{0;2;-2\}$, $\vec{c}\{-3;2;0\}$, $\vec{d}\{-2;1;-2\}$. Найдите координаты векторов:

а) $3\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$; б) $-\vec{a}+2\vec{c}-\vec{d}$;

в) $0,1\vec{a}+3\vec{b}+0,7\vec{c}-5\vec{d}$; г) $\left(2\vec{a}+3\vec{b}\right)-\left(\vec{a}-2\vec{b}+2\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\right)$.

130. Коллинеарны ли векторы:

а) $\vec{a}\{3;6;8\}$ и $\vec{b}\{6;12;16\}$; б) $\vec{c}\{1;-1;3\}$ и $\vec{d}\{2;3;15\}$;

в) $\vec{i}\{1;0;0\}$ и $\vec{j}\{0;1;0\}$; г) $\vec{m}\{0;0;0\}$ и $\vec{n}\{5;7;-3\}$.

131. Компланарны ли векторы:

а) $\vec{a}\{-3;-3;0\}, \vec{i}$ и $\vec{j}$; б) $\vec{b}\{2;0;3\}, \vec{i}$ и $\vec{j}$;

в) $\vec{c}\{1;0;-2\}, \vec{i}$ и $\vec{k}$; г) $\vec{d}\{1;-1;2\}, \vec{e}\{-2;0;1\}$ и $\vec{f}\{5;-1;0\}$.

132. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если:

а) $A(3;-1;2), B(2;-1;4)$;

б) $A(-2;6;-2), B(3;-1;0)$;

в) $A\left(1;\frac{5}{6};\frac{1}{2}\right), B\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4}\right)$.

133. Вершины треугольника ABC имеют координаты: $A(1;6;2)$, $B(2;3;-1)$, $C(-3;4;5)$. Разложите векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CA}$ по координатным векторам $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

134. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между векторами:

а) $\overrightarrow{B_1B}$ и $\overrightarrow{B_1C}$; б) $\overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{B_1D_1}$;

в) $\overrightarrow{A_1C_1}$ и $\overrightarrow{A_1B}$; г) $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC}$;

д) $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{AC}$; е) $\overrightarrow{B_1C}$ и $\overrightarrow{AD_1}$;

ж) $\overrightarrow{A_1D_1}$ и $\overrightarrow{BC}$; з) $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{C_1C}$.

135. Даны векторы $\vec{a}\{3;-1;1\}$, $\vec{b}\{-5;1;0\}$ и $\vec{c}\{-1;-2;1\}$. Выясните, какой угол (острый, прямой или тупой) между векторами:

а) $\vec{a}$ и $\vec{b}$; б) $\vec{b}$ и $\vec{c}$; в) $\vec{a}$ и $\vec{c}$.

136. Найдите углы, периметр и площадь треугольника, вершинами которого являются точки $A(1;-1;3)$, $B(3;-1;1)$ и $C(-1;1;3)$.

137. Вычислите угол между прямыми AB и CD, если:

а) $A(3;-2;4)$, $B(4;-1;2)$, $C(6;-3;2)$, $D(7;-3;1)$;

б) $A(5;-8;-1)$, $B(6;-8;-2)$, $C(7;-5;-11)$, $D(7;-7;-9)$;

в) $A(1;0;2)$, $B(2;1;0)$, $C(0;-2;-4)$, $D(-2;-4;0)$;

г) $A(-6;-15;7)$, $B(-7;-15;8)$, $C(14;-10;9)$, $D(14;-10;7)$.

138. Даны координаты точек A, B, C. Найдите: 1) длины векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$; 2) скалярное произведение векторов AB и AC; 3) угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

а) $A(1;0;-1)$, $B(-1;4;-2)$, $C(1;5;-2)$;

б) $A(3;0;1)$, $B(1;5;0)$, $C(3;5;0)$;

в) $A(1;0;1)$, $B(-1;5;1)$, $C(2;6;0)$;

г) $A(1;-3;1)$, $B(-1;2;1)$, $C(2;3;0)$;

д) $A(3;0;1)$, $B(1;5;1)$, $C(4;6;0)$;

е) $A(4;0;1)$, $B(2;5;0)$, $C(5;1;3)$;

ж) $A(1;0;1)$, $B(-1;5;0)$, $C(2;6;0)$;

з) $A(3;0;1)$, $B(1;5;0)$, $C(4;2;-1)$;

и) $A(1;0;0)$, $B(-1;5;1)$, $C(2;4;2)$.

139. Найдите координаты центра и радиус сферы, заданной уравнением.

а) $x^2+y^2+z^2+4x+6z-3=0$;

б) $x^2+y^2+z^2+4x-2y-11=0$;

в) $x^2+y^2+z^2+4y-12=0$;

г) $x^2+y^2+z^2+4x-2z-4=0$;

д) $x^2+y^2+z^2-10x-2y+2z-2=0$;

е) $x^2+y^2+z^2+6x-2y-6=0$.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Башмаков, М. И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учебник/ М. И. Башмаков. – М.: ИЦ Академия, 2016. – 256 с.

2. Башмаков, М.И. Математика : алгебра и начала математического анализа, геометрия : учебник для студ. учреждений сред. проф. образования / М. И. Башмаков. – 4-е изд., стер. – М. : Академия, 2017. – 253 с.

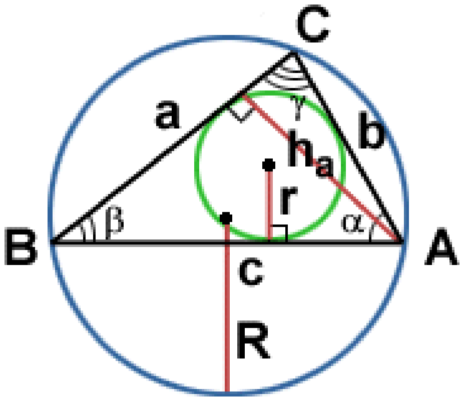
3. Гумеров, Р. М. Математика : метод. указания к выполнению контрольной работы / Р. М. Гумеров, З. Ш. Аглямова, Г. Р. Ерошкина; Институт экономики, управления и права (г. Казань), Колледж, Кафедра высшей математики. – Казань : Изд-во «Познание» Института экономики, управления и права, 2014. – 28 с.

4. Дадаян, А. А. Математика : учебник / А. А. Дадаян. – 3-е изд. – М. : Форум: НИЦ ИНФРА-М, 2018. – 544 с. – Режим доступа: URL: http://znanium.com/catalog/product/967862

5. Канцедал, С. А. Дискретная математика: учеб. пособие / С. А. Канцедал. – М. : ИД ФОРУМ: НИЦ Инфра-М, 2018. – 222 с. – Режим доступа: URL: http://znanium.com/catalog/product/927464

ПРИЛОЖЕНИЕ

Треугольник



a, b, c – длины сторон треугольника;

h – высота треугольника;

γ – угол между сторонами a и b;

r – радиус вписанной окружности;

R – радиус описанной окружности;

$P = a + b + c$ – периметр треугольника;

$p = \dfrac{a+b+c}{2}$ – полупериметр треугольника;

$S = \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$ – площадь треугольника;

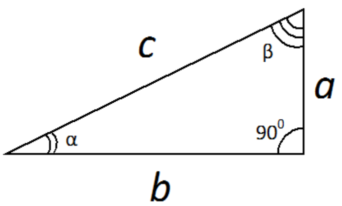
$S = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$ – формула Герона;

$S = \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma$ – площадь треугольника по двум сторонам и углу между ними;

$S = \dfrac{a \cdot b \cdot c}{4R}$ – площадь треугольника по трем сторонам и радиусу описанной окружности;

$S = p \cdot r$ – площадь треугольника по трем сторонам и радиусу вписанной окружности.

Прямоугольный треугольник



a, b – катеты; c – гипотенуза;

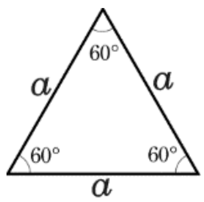
$c^2 = a^2 + b^2$ – теорема Пифагора;

$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$ – площадь прямоугольного треугольника;

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$; $\cos\alpha = \frac{b}{c}$; $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$ – соотношения в прямоугольном треугольнике;

$R = \frac{c}{2}$ – радиус описанной около прямоугольного треугольника окружности.

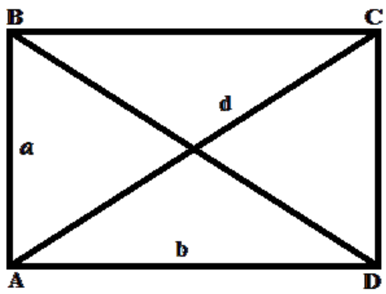
Равносторонний треугольник



$S = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$ – площадь равностороннего треугольника;

$r = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot a$, $R = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot a$ – радиусы вписанной и описанной окружностей.

Прямоугольник



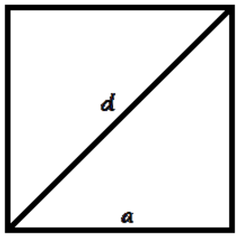
a, b – длины сторон прямоугольника;

$d = \sqrt{a^2 + b^2}$ – диагональ прямоугольника;

$P = 2 \cdot (a + b)$ – периметр прямоугольника;

$S = a \cdot b$ – площадь прямоугольника.

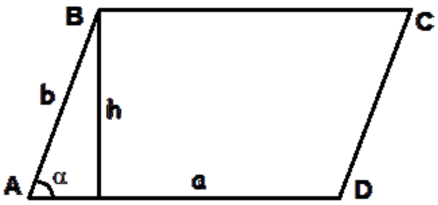
Квадрат



a – длина стороны квадрата;

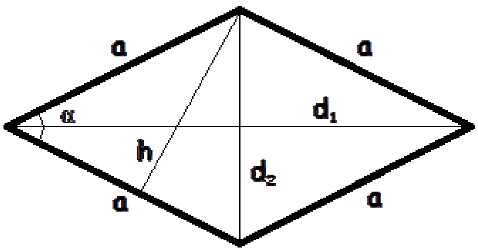
$d = a \cdot \sqrt{2}$ – длина диагональ квадрата;
$P = 4 \cdot a$ – периметр квадрата;
$S = a^2,\ S = \frac{1}{2} \cdot d^2$ – формулы площади квадрата.

Параллелограмм



a, b – длины сторон параллелограмма;
h – длина высоты параллелограмма;
$S = a \cdot h$ – площадь параллелограмма;
$S = a \cdot b \cdot \sin\alpha$ – площадь параллелограмма по двум сторонам и углу между ними.

Ромб



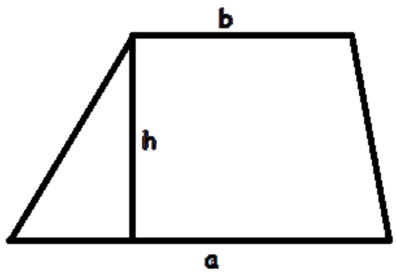
a – длина стороны ромба;
h – длина высоты ромба;
α – угол между сторонами ромба;

d_1, d_2 – длины диагоналей;

$S = a \cdot h$ – площадь ромба;

$S = a^2 \cdot \sin\alpha$, $S = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2$ – формулы площади ромба.

Трапеция



a, b – длины оснований трапеции;

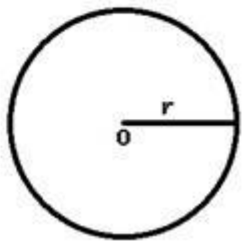
c, d – длины боковых сторон трапеции;

h – длина высоты трапеции;

$P = a + b + c + d$ – периметр трапеции;

$S = \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h$ – площадь трапеции.

Окружность и круг



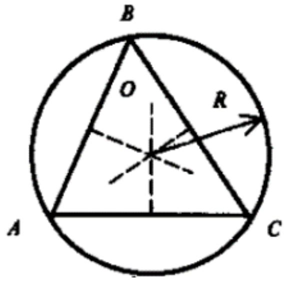
r – радиус круга, окружности;

d – диаметр круга, окружности;

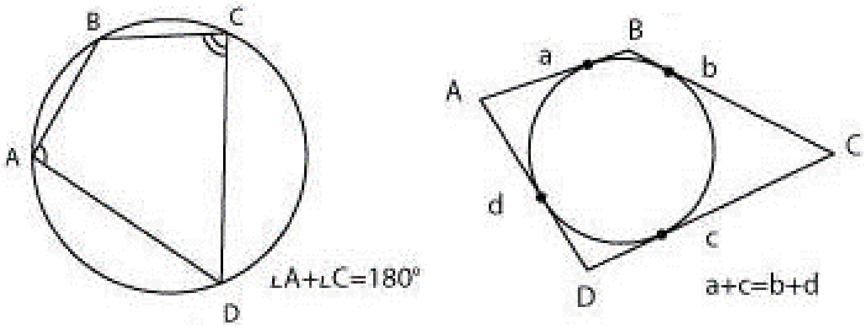
$S = \pi \cdot r^2$, $S = \frac{1}{4}\pi \cdot d^2$ – формулы площади круга;

$l = 2 \cdot \pi \cdot r$ – длина окружности.

Свойства вписанных, описанных фигур



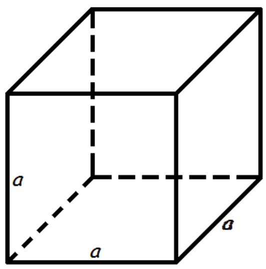
Описанная вокруг треугольника ABC окружность имеет центр в пересечении перпендикуляров к серединам сторон.



Четырехугольник можно вписать в окружность, если суммы его противоположных углов равны 180^0.

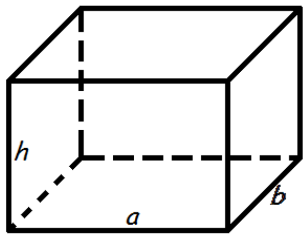
Четырехугольник можно описать вокруг окружности, если суммы длин его противоположных сторон равны.

Куб



a – ребро куба;
$d = a\sqrt{3}$ – диагональ куба;
$S = a^2$ – площадь одной грани куба;
$S = 6a^2$ – площадь полной поверхности куба;
$V = a^3$ – объем куба.

Прямоугольный параллелепипед



a – длина основания;

b –ширина основания;

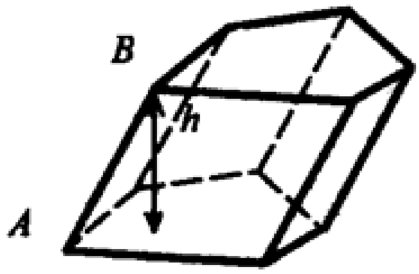
h – высота параллелепипеда;

$d = \sqrt{a^2 + b^2 + h^2}$ – диагональ параллелепипеда;

$S = a \cdot b$ – площадь основания;

$V = a \cdot b \cdot h$– объем прямоугольного параллелепипеда.

Призма

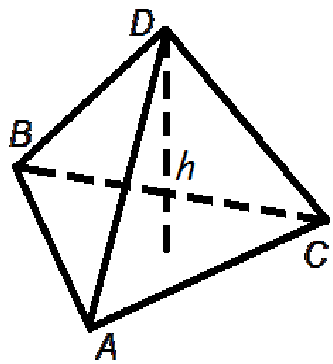


h – высота призмы;

$S = 2 \cdot S_{осн.} + S_{бок.}$ – площадь полной поверхности призмы;

$V = S_{осн.} \cdot h$– объем призмы.

Пирамида

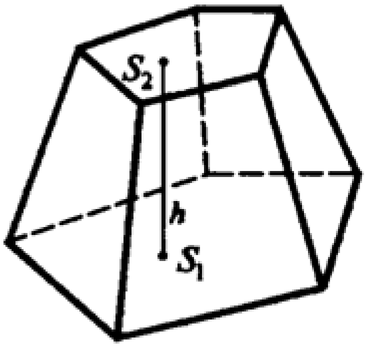


h – высота пирамиды;

$S = S_{осн.} + S_{бок.}$ – площадь полной поверхности пирамиды;

$V = \frac{1}{3} \cdot S_{осн.} \cdot h$ – объем пирамиды.

Усеченная пирамида



h – высота усеченной пирамиды;

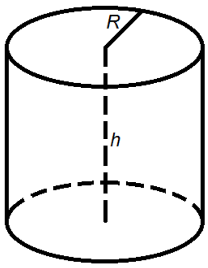
S_1 – площадь нижнего основания пирамиды;

S_2 – площадь верхнего основания пирамиды;

$S = S_1 + S_2 + S_{бок.}$ – площадь полной поверхности усеченной пирамиды;

$V = \frac{1}{3} \cdot (S_1 + \cdot S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2}) \cdot h$ – объем усеченной пирамиды.

Цилиндр



R – радиус основания цилиндра;

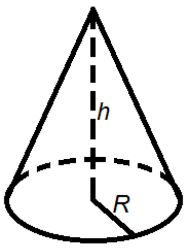
h – высота цилиндра;

$S = \pi \cdot R^2$ – площадь основания;

$S = 2 \cdot \pi \cdot R^2 + 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h$ – площадь полной поверхности цилиндра;

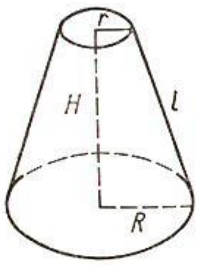
$V = \pi \cdot R^2 \cdot h$ – объем цилиндра.

Конус



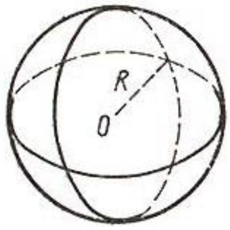
R – радиус основания;
h – высота конуса;
l – образующая конуса;
$S_{осн.} = \pi \cdot R^2$ – площадь основания конуса;
$S_{бок.} = \pi \cdot R \cdot l$ – площадь боковой поверхности конуса;
$V = \dfrac{1}{3}\pi \cdot R^2 \cdot h$– объем конуса.

Усеченный конус



R – радиус нижнего основания;
r – радиус верхнего основания;
H – высота усеченного конуса;
l – образующая конуса;
$S_{н.осн.} = \pi \cdot R^2$ – площадь нижнего основания конуса;
$S_{в.осн.} = \pi \cdot r^2$ – площадь верхнего основания конуса;
$S_{бок.} = \pi \cdot (r + R) \cdot l$ – площадь боковой поверхности;
$V = \dfrac{1}{3}\pi \cdot (R^2 + r^2 + R \cdot r) \cdot h$ – объем конуса.

Шар, сфера



R – радиус шара, сферы;

$S = 4\pi \cdot R^2$ – площадь сферы;

$V = \dfrac{4}{3}\pi \cdot R^3$ – объем шара.

Векторы и координаты в пространстве

Координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$:

$$\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ – длина вектора $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$;

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$ – скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + ... + a_n \cdot b_n$ – скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в координатной форме;

$\cos\varphi = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \dfrac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + ... + a_n \cdot b_n}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2}}$ – косинус угла ϕ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$ – уравнение сферы с центром в точке $\left(x_0; y_0; z_0\right)$ и радиусом R .

Учебное издание

МАТЕМАТИКА

ГЕОМЕТРИЯ

Сборник задач

Авторы:
Гаврилова Людмила Николаевна
Аглямова Зульфина Шамилевна
Митина Евгения Константиновна
Кожеманова Татьяна Николаевна

Главный редактор *Г. Я. Дарчинова*
Редактор *Т. В. Андреева*
Технический редактор *С. А. Каримова*
Дизайнер *Н. Е. Коняхина*

Подписано в печать 20.02.2019. Формат 60x84 1/16
Гарнитура Times NR, 10. Усл. печ. л. 9
Тираж 300 экз. Заказ № 90

Издательство Казанского инновационного университета им. В. Г. Тимирясова (ИЭУП)
420111, г. Казань, ул. Московская, 42
Тел. (843) 231-92-90
E-mail: zaharova@ieml.ru

Отпечатано с готового оригинал-макета
в типографии ООО «ТЦО «Таглимат»:
420108, г. Казань, ул. Зайцева, 17