Казанский инновационный университет имени В. Г. Тимирясова (ИЭУП)

МАТЕМАТИКА

Сборник задач

Казань
Познание
2019

УДК 51(076.1)
ББК 22.1я72
М34

*Печатается по решению секции
естественно-научных дисциплин учебно-методического совета
Казанского инновационного университета им. В. Г. Тимирясова*

Рецензенты:
доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Казанского инновационного университета им. В. Г. Тимирясова
С. И. Филиппов;
кандидат педагогических наук, доцент кафедры высшей математики и информационных технологий Набережночелнинского филиала Казанского инновационного университета им. В. Г. Тимирясова ***Ю. Н. Бурханова***

М34 Математика : сборник задач / Л. Н. Гаврилова, З. Ш. Аглямова, Е. К. Митина, Т. Н. Кожеманова. – Казань : Изд-во «Познание» Казанского инновационного университета им. В. Г. Тимирясова, 2019. – 48 с.

Сборник задач содержит задания по дисциплине Математика математического и общего естественнонаучного учебного цикла для студентов, обучающихся по специальности 38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям).

Данный сборник задач может быть использован для проведения практических занятий и организации самостоятельной работы студентов при изучении данной дисциплины.

УДК 51(076.1)
ББК 22.1я72

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Данное практическое издание предназначено для студентов изучающих дисциплину ЕН.01 Математика математического и общего естественнонаучного учебного цикла по специальности 38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям).

Целями освоения дисциплины ЕН.01 Математика являются:

– создание математического фундамента для изучения общенаучных дисциплин и дисциплин профессионального цикла,

– воспитание математической культуры и понимания роли математики в различных сферах профессиональной деятельности.

Сборник задач содержит задания для самостоятельного решения по дисциплине ЕН.01 Математика. Данное пособие может быть использовано для проведения практических занятий и организации самостоятельной работы студентов при изучении дисциплины ЕН.01 Математика.

В сборнике задач рассматриваются такие разделы математики как основные понятия комплексных чисел, элементы линейной алгебры, введение в анализ, дифференциальные исчисления, интегральное исчисление и дифференциальные уравнения.

Данный сборник задач направлен на формирование следующих умений:

– умение решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;

– быстрота и точность поиска, оптимальность и научность необходимой информации, а также обоснованность выбора применения современных технологий её обработки;

– организовывать самостоятельную работу при освоении профессиональных компетенций; стремиться к самообразованию и повышению профессионального уровня;

– умело и эффективно работать в коллективе, соблюдать профессиональную этику;

– умение рационально и корректно использовать информационные ресурсы в профессиональной и учебной деятельности;

а также формированию следующих знаний:

– знание основных математических методов решения прикладных задач в области профессиональной деятельности;

– знание основных понятий и методов теории комплексных чисел, линейной алгебры, математического анализа;

– значение математики в профессиональной деятельности и при освоении ППССЗ;

– знание математических понятий и определений, способов доказательства математическими методами;

– знание математического анализа информации, представленной различными способами, а также методов построения графиков различных процессов.

Применение сборника задач позволит приобрести практический опыт решения задач с применением основ математики.

РАЗДЕЛ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Комплексные числа и действия над ними

Определение комплексного числа в алгебраической форме, действия над ними. Геометрическое изображение комплексных чисел. Модуль и аргументы комплексного числа. Решение алгебраических уравнений.

1. Указать действительную и мнимую части комплексного числа.

а) $z = 4 - 5i$; б) $z = \sqrt{3} + 3i$; в) $z = 1 - 2i$;
г) $z = -9 + 3i$; д) $z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$; е) $z = -8 - 6i$;
ж) $z = 3 - 7i$; з) $z = -2 + 3i$; и) $z = 4 + 9i$;
к) $z = 3 - 8i$; л) $z = -3 - i$; м) $z = 5 + 7i$.

2. Найти степень числа i.

а) i^{17}; б) i^{71}; в) i^{151};
г) i^{143}; д) i^{19}; е) i^{201};
ж) i^{195}; з) i^{14}; и) i^{18};
к) i^{37}; л) i^{41}; м) i^{52}.

3. Найти комплексное число, сопряженное данному числу.

а) $z = -5 - 9i$; б) $z = 8 - 6i$; в) $z = 5 + i$;
г) $z = -3 + 5i$; д) $z = -7i$; е) $z = -5 + 3i$;
ж) $z = -9 - i$; з) $z = 4 - 3i$; и) $z = -2 - 4i$;
к) $z = 5$; л) $z = 8 + 4i$; м) $z = i$.

4. Изобразить комплексное число в комплексной плоскости.

а) $z = -2 + 2i$; б) $z = 2 + i$; в) $z = 2i$;
г) $z = -3 - 3i$; д) $z = -9$; е) $z = 5 - 3i$;
ж) $z = -3i$; з) $z = -4 - 3i$; и) $z = 7 + 7i$;
к) $z = 4$; л) $z = 4 - 4i$; м) $z = 5i$.

5. Найти модуль комплексного числа.

а) $z = -2i$; б) $z = 8$; в) $z = -3 + i$;
г) $z = 4i$; д) $z = 2 + 2i$; е) $z = -i$;
ж) $z = -6 - 3i$; з) $z = -1 - i$; и) $z = 5 + 5i$;
к) $z = 7$; л) $z = -6 - 6i$; м) $z = -1 + 2i$.

6. Найти аргумент комплексного числа.

а) $z = -\sqrt{3} - 3i$; б) $z = \sqrt{3} - 3i$; в) $z = 5i$;
г) $z = -\sqrt{3} + 3i$; д) $z = \sqrt{3} + 3i$; е) $z = -6\sqrt{3}i$;

ж) $z=-6+3\sqrt{2}i$; з) $z=6+3\sqrt{2}i$; и) $z=-3i$;
к) $z=-6-3\sqrt{2}i$; л) $z=6-3\sqrt{2}i$; м) $z=-\sqrt{2}+\sqrt{6}i$.

7. Найти сумму, разность, произведение и частное двух комплексных чисел в алгебраической форме.

а) $z_1=2+3i$, $z_2=1+i$; б) $z_1=3+4i$, $z_2=1-i$;
в) $z_1=1-2i$, $z_2=-1+i$; г) $z_1=2+5i$, $z_2=-1-i$;
д) $z_1=3-8i$, $z_2=2+i$; е) $z_1=3-7i$, $z_2=2-i$;
ж) $z_1=2+6i$, $z_2=-2+i$; з) $z_1=4+2i$, $z_2=-2-i$;
и) $z_1=5+3i$, $z_2=3+i$; к) $z_1=6-2i$, $z_2=3-i$;
л) $z_1=7+9i$, $z_2=-3+i$; м) $z_1=3-7i$, $z_2=-3-i$.

8. Решить уравнение на множестве комплексных чисел.

а) $x^2+1=0$; б) $x^2+3x+4=0$;
в) $x^2+4=0$; г) $x^2-3x+3=0$;
д) $x^2+9=0$; е) $x^2-5x+7=0$;
ж) $x^2+16=0$; з) $x^2+x+2=0$;
и) $x^2+25=0$; к) $x^2+3x+3=0$;
л) $x^2+36=0$; м) $x^2+x+1=0$.

РАЗДЕЛ 2. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Матрицы и определители

Матрицы и действия над ними. Экономико-математические методы. Матричные модели. Определитель матрицы.

1. Каковы размеры матриц.

а) $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & 1 \\ 5 & -1 & 0 & 2 \\ 6 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; б) $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$;

в) $C=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 8 & 0 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$; г) $D=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

д) $F=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$; е) $G=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Чему равны элементы a_{12}, a_{31}, a_{24} матрицы A.

а) $A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \\ 4 & -8 & 5 & 6 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix} -1 & -6 & 1 & 2 \\ 8 & 3 & -2 & 0 \\ 5 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; г) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 \\ 3 & 7 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -5 \end{pmatrix}$.

3. Найти произведение элементов $a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$ матрицы A.

а) $A=\begin{pmatrix} 5 & 7 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 7 \\ 5 & -6 & 8 & 9 \end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & -3 & 5 \\ 1 & -7 & 1 & -6 \end{pmatrix}$; г) $A=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & -7 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Найти сумму элементов главной диагонали и произведение элементов вспомогательной диагонали матрицы.

а) $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; б) $B=\begin{pmatrix} 3 & 10 & 7 \\ -8 & 2 & 11 \\ 3 & -9 & -21 \end{pmatrix}$;

в) $C=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & -11 & 6 \end{pmatrix}$; г) $D=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

5. Записать матрицы транспонированные данным.

а) $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; б) $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $C=\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$; г) $D=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

6. Если матрица A^T имеет вид:

а) $A^T=\begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 4 & 2 \\ 1 & -7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; б) $A^T=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

в) $A^T=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & -5 \end{pmatrix}$, г) $A^T=\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 2 & -9 & 2 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

то каков вид матрицы A?

7. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу C.

а) $C=A+B$; б) $C=A-B$;

в) $C=A\cdot B$; г) $C=B\cdot A$;

д) $C=A^T+B$; е) $C=A-B^T$;

ж) $C=A^T\cdot B$; з) $C=B^T\cdot A$.

8. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 4 & 1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}3 & -2 & -2\\ 1 & -2 & 3\\ 2 & 2 & -1\end{pmatrix}$. Найти матрицу C

.

а) $C=A+B$;
б) $C=A-B$;
в) $C=A\cdot B$;
г) $C=B\cdot A$;
д) $C=A^T+B$;
е) $C=A-B^T$;
ж) $C=A^T\cdot B$;
з) $C=B^T\cdot A$.

9. Даны матрицы A и B. Найти матрицу C.

а) $A=\begin{pmatrix}7 & -4\\ 0 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ -1 & 2\\ 6 & 3\end{pmatrix}$, $C=3B+2A$;

б) $A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $C=A^T-B^T$;

в) $A=\begin{pmatrix}-4 & 5 & 1\\ 2 & -3 & 8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & 4\\ 10 & -5\\ 3 & 16\end{pmatrix}$, $C=B-2A^T$;

г) $A=\begin{pmatrix}-6 & 1\\ 0 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & 1 & -3\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $C=4A+B^T$;

д) $A=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 4\\ -1 & 2 & -5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & 1 & 0\\ -3 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $C=2A-3B$.

10. Найти произведение матриц A и B.

а) $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 4 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -4 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 4\\ -3 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 3 & -2\end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 4 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 & 1 \\ -6 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$;

г) $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & -8 & -20 \\ 0 & -3 & -2 & 5 & 9 \\ 1 & 4 & 3 & 8 & 9 \end{pmatrix}$;

д) $A=\begin{pmatrix} 7 & 3 & 10 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}$.

11. Вычислить определитель второго порядка.

а) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 7 & 6 \\ -4 & 10 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 8 & -9 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} x+1 & x-1 \\ x & x+1 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$.

12. Вычислить определитель третьего порядка.

а) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & -8 & 1 \\ 6 & 1 & 10 \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}$.

13. Решить уравнения.

а) $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix}=0$; б) $\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$;

в) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = 0$;   г) $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

14. Вычислить.

а) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 7 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & -8 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ -6 & 2 & 0 \end{vmatrix}$;   б) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & -5 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$;   г) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 7 & 1 \\ 4 & 3 & 9 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 4 & 14 & 7 \\ 8 & 6 & 18 \end{vmatrix}$.

15. Найти миноры и алгебраические дополнения всех элементов определителя.

а) $\begin{vmatrix} 5 & 7 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$;   б) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

16. Найти обратную матрицу A^{-1} и сделать проверку.

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$;   б) $A = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$;   г) $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

17. Найти обратную матрицу A^{-1} и сделать проверку.

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$;   б) $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 8 & 4 & -1 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$;   г) $A = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 10 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

18. Для четырех фабрик, выпускающих пять видов изделий, заданы матрицы поквартальных выпусков одного отчетного года:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 20 & 17 & 11 \\ 21 & 30 & 16 & 18 & 31 \\ 14 & 22 & 14 & 25 & 8 \\ 12 & 32 & 9 & 10 & 20 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 12 & 18 & 20 & 20 & 15 \\ 17 & 28 & 19 & 23 & 33 \\ 20 & 20 & 18 & 26 & 18 \\ 9 & 3 & 12 & 12 & 22 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 14 & 18 & 25 & 20 & 11 \\ 20 & 30 & 25 & 20 & 30 \\ 18 & 20 & 20 & 25 & 12 \\ 14 & 30 & 15 & 11 & 20 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 12 & 20 & 20 & 20 & 14 \\ 20 & 32 & 28 & 25 & 30 \\ 20 & 25 & 30 & 30 & 10 \\ 10 & 28 & 18 & 14 & 24 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу годового выпуска продукции и матрицы приростов за каждый квартал и проанализируйте полученные результаты.

19. Для трех автозаводов, выпускающих шесть видов автопродукции, заданы матрицы поквартальных выпусков одного отчетного года:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 60 & 92 & 30 & 72 & 50 & 60 \\ 52 & 95 & 31 & 70 & 52 & 40 \\ 60 & 95 & 25 & 62 & 60 & 30 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 58 & 100 & 23 & 73 & 52 & 44 \\ 50 & 110 & 31 & 68 & 55 & 45 \\ 62 & 98 & 28 & 60 & 60 & 32 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 60 & 100 & 25 & 75 & 48 & 32 \\ 48 & 98 & 31 & 72 & 53 & 48 \\ 64 & 93 & 25 & 63 & 60 & 33 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 64 & 95 & 28 & 75 & 56 & 38 \\ 49 & 96 & 31 & 78 & 58 & 51 \\ 66 & 99 & 25 & 60 & 61 & 38 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу годового выпуска автопродукции и матрицы приростов за каждый квартал и проанализируйте полученные результаты.

20. Предприятие производит четыре вида продукции и продает ее в пяти районах города. Матрица $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ задает цену реализации единицы продукции i-го типа в j-м районе. Рассчитайте выручку предприятия в каждом районе, если реализация товара за месяц по видам задана матрицей $\begin{pmatrix} 80 & 50 & 35 & 45 \end{pmatrix}$. Определите, какой район наиболее выгоден для реализации.

21. Молокозавод производит пять видов продукции, объемы выпуска которой заданы матрицей $A = \begin{pmatrix} 25 & 31 & 20 & 16 & 30 \end{pmatrix}$. Реализвация продукции производится в четырех магазинах города. Цены реализации единицы i-го

вида продукции в j-м магазине задана матрицей $B=\begin{pmatrix} 21 & 32 & 10 & 42 \\ 18 & 25 & 27 & 51 \\ 20 & 50 & 19 & 30 \\ 10 & 30 & 45 & 28 \\ 40 & 20 & 25 & 35 \end{pmatrix}$.

Найдите выручку по магазинам и определим, какой из магазинов наиболее выгоден для реализации товара.

22. Завод производит четыре типа продукции, используя пять видов ресурсов. Норма затрат ресурсов i-го вида на производство единицы продукции j-го типа задана матрицей $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, выпуск продукции за отчетный период – матрицей $B=\begin{pmatrix} 32 \\ 44 \\ 28 \\ 35 \end{pmatrix}$, стоимость единицы каждого вида ресурсов задана матрицей $P=\begin{pmatrix} 10 & 17 & 20 & 12 & 15 \end{pmatrix}$. Найдите за отчетный период матрицу полных затрат ресурсов каждого вида и полную стоимость всех затраченных ресурсов.

23. Фабрика производит пять типов продукции, используя четыре вида ресурсов. Норма затрат ресурсов i-го вида на производство единицы продукции j-го типа задана матрицей $A=\begin{pmatrix} 30 & 25 & 40 & 20 & 15 \\ 25 & 40 & 15 & 50 & 10 \\ 25 & 10 & 20 & 40 & 20 \\ 35 & 45 & 30 & 15 & 45 \end{pmatrix}$, выпуск продукции за отчетный период – матрицей $B=\begin{pmatrix} 33 \\ 47 \\ 54 \\ 29 \\ 42 \end{pmatrix}$, стоимость единицы каждого вида ресурсов задана матрицей $P=\begin{pmatrix} 24 & 18 & 20 & 26 \end{pmatrix}$. Найдите за отчетный период матрицу полных затрат ресурсов каждого вида и полную стоимость всех затраченных ресурсов.

Методы решения систем линейных уравнений

Метод Гаусса. Правило Крамера. Метод обратной матрицы.

1. Выяснить, является ли пара чисел решением системы.

а) $(2;-2)$ $\begin{cases} 5x+y=8 \\ -3x+2y=-10 \end{cases}$; б) $(3;1)$ $\begin{cases} x+y=4 \\ 2x-y=2 \end{cases}$;

в) $(1;2)$ $\begin{cases} x+y-3=0 \\ x-y+1=0 \end{cases}$; г) $(-5;-5)$ $\begin{cases} -7,2x+11y=-19 \\ 5,8x-13y=36 \end{cases}$;

д) $(4;5)$ $\begin{cases} x+y=9 \\ 2x-y=-9 \end{cases}$; е) $(1;-1)$ $\begin{cases} 2,7x-8,1y=11,8 \\ 16x-15y=1 \end{cases}$.

2. Решите системы двух уравнений с двумя неизвестными и определите тип системы уравнений.

а) $\begin{cases} 4x+5y=-28 \\ -2x+3y=14 \end{cases}$; б) $\begin{cases} -4x+2y=8 \\ -2x+y=1 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} 3x-2y=5 \\ 3x+4y=42 \end{cases}$; г) $\begin{cases} 4x-2y=8 \\ 2x-y=4 \end{cases}$;

д) $\begin{cases} x-3y=7 \\ -7x+y=-69 \end{cases}$; е) $\begin{cases} 5x+2y=3 \\ -5x-2y=-6 \end{cases}$;

ж) $\begin{cases} 3x-2y=6 \\ 3x+10y=-12 \end{cases}$; з) $\begin{cases} 2x-2y=1 \\ 6x-6y=3 \end{cases}$.

3. Решить систему линейных алгебраических уравнений по правилу Крамера.

а) $\begin{cases} 2x-3y-5z=1 \\ 3x+y-2z=-4 \\ x-2y+z=5 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x-y+3z=3 \\ x+2y+z=2 \\ x-3y+4z=-1 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} x-3y+z=2 \\ 2x+y+3z=3 \\ 2x-y-2z=8 \end{cases}$; г) $\begin{cases} 3x+y-2z=1 \\ x-2y+3z=5 \\ 2x+3y-z=-4 \end{cases}$;

д) $\begin{cases} 2x+y+3z=-1 \\ 5x+3y+2z=-7 \\ x+4y+3z=8 \end{cases}$; е) $\begin{cases} 3x+2y+z=7 \\ 2x+5y+3z=-4 \\ 3x+4y+2z=2 \end{cases}$;

ж) $\begin{cases} 4x-3y+5z=-3 \\ 3x-2y+8z=-6 \\ x-7y-5z=-7 \end{cases}$; з) $\begin{cases} 3x+2y-4z=1 \\ 4x+y-2z=3 \\ 5x+2y-3z=2 \end{cases}$;

и) $\begin{cases} 4x+2y-z=-1 \\ 5x+3y-2z=-3 \\ 3x+2y-z=-2 \end{cases}$; к) $\begin{cases} 2x+3y-z=2 \\ x-y+3z=-4 \\ 3x+5y+z=4 \end{cases}$.

4. Решить систему линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.

а) $\begin{cases} 5x+2y+3z=-2 \\ 2x-2y+5z=0 \\ 3x+4y+2z=-10 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x+3y+5z=10 \\ 3x+7y+4z=3 \\ x+2y+2z=3 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} 4x-3y+2z=-4 \\ 6x-2y+3z=-1 \\ 5x-3y+2z=-3 \end{cases}$; г) $\begin{cases} 5x-y-2z=1 \\ 3x-4y+z=-4 \\ 2x+3y+3z=11 \end{cases}$;

д) $\begin{cases} 2x-3y+2z=7 \\ 3x+4y+7z=13 \\ 5x+y-5z=-6 \end{cases}$; е) $\begin{cases} x-2y+3z=14 \\ 2x+3y-4z=-16 \\ 3x-2y-5z=-8 \end{cases}$;

ж) $\begin{cases} 3x+4y-2z=11 \\ 2x-y-z=4 \\ 3x-2y+4z=11 \end{cases}$; з) $\begin{cases} 2x+11y+5z=2 \\ 2x+3y+2z=-3 \\ x+3y+4z=-3 \end{cases}$;

и) $\begin{cases} x-6y-4z=6 \\ -x-6y-4z=2 \\ 3x+9y+2z=6 \end{cases}$; к) $\begin{cases} 2x+y+4z=-5 \\ x+3y-6z=2 \\ 3x-2y+2z=9 \end{cases}$.

5. Решить систему линейных алгебраических уравнений методом обратной матрицы.

а) $\begin{cases} 2x-4y+3z=1 \\ x-2y+4z=3 \\ 3x-y+5z=2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3y+z=1 \\ 2x+4y+z=2 \\ 2x+2y=3 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} x+2y=10 \\ 3x+2y+z=23 \\ y+2z=13 \end{cases}$; г) $\begin{cases} 7x+2y+3z=13 \\ 9x+3y+4z=15 \\ 5x+y+3z=14 \end{cases}$;

д) $\begin{cases} x-y+z=3 \\ 2x+y+z=11; \\ x+y+2z=8 \end{cases}$ е) $\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 2x-y+2z=3; \\ 3x+y-2z=2 \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x-y+z=6 \\ x-2y+z=9 \\ x-4y-2z=3 \end{cases}$; з) $\begin{cases} -x+4y+2z=1 \\ -2x+5y+3z=2 \\ -3x+3y+2z=0 \end{cases}$;

и) $\begin{cases} 3x+y-z=-1 \\ 2x-3y+z=1 \\ x+2y-3z=-3 \end{cases}$; к) $\begin{cases} x+y+z=-3 \\ x+y+2z=-17 \\ x+2y+4z=-24 \end{cases}$.

6. Из некоторого листового материала необходимо выкроить 360 заготовок типа *А*, 300 заготовок типа *Б* и 675 заготовок типа *В*. При этом можно применять три способа раскроя. Количество заготовок, получаемых из каждого листа при каждом способе раскроя, указано в таблице:

Тип заготовки	Способ раскроя		
	1	2	3
А	3	2	1
Б	1	6	2
В	4	1	5

Записать в математической форме условия выполнения задания.

7. Швейная фабрика в течение трех дней производила костюмы, плащи и куртки. Известны объемы выпуска продукции за три дня и денежные затраты на производство за эти три дня. Найти себестоимость единицы продукции каждого вида.

День	Объем выпуска продукции (единиц)			Затраты (тыс. усл. ед)
	Костюмы	Плащи	Куртки	
I	50	10	30	176
II	35	25	20	168
III	40	20	30	184

8. Предприятие выпускает три вида продукции, используя сырье трех типов. Необходимые характеристики производства указаны в таблице:

Вид сырья	Расход сырья по видам продукции, вес. ед./изд.	Запас сырья, вес. ед.

	1	2	3	
1	6	4	5	2 700
2	4	3	1	1 650
3	5	2	3	1 800

Требуется определить объем выпуска продукции каждого вида при заданных запасах сырья.

9. Для изготовления тех видов изделий (*A*, *B* и *C*) фабрика расходует в качестве сырья сталь, чугун и цветные металлы, имеющиеся в ограниченном количестве. Необходимые характеристики производства указаны в таблице:

Вид сырья	Нормы расхода сырья на единицу изделия, усл. ед.			Запасы сырья на 1 день, усл. ед.
	1	2	3	
1	6	4	5	2 700
2	4	3	1	1 650
3	5	2	3	1 800

Требуется определить ежедневный объем выпуска каждого вида изделий.

10. На предприятие с работниками четырех категорий привезли заработную плату в купюрах следующего достоинства: по 100 рублей – 1850 купюр, по 10 рублей – 250 купюр, 1 рублю – 740 купюр. Заработная плата работника 1-й категории составляет 962 руб., 2-й категории –713 руб., 3-й категории – 452 руб., 4-й категории – 261 руб. Определить, сколько сотрудников каждой категории работает на предприятии, если каждому сотруднику выдали заработную плату минимальным числом купюр.

Моделирование и решение задач линейного программирования

Математические модели. Задачи на практическое применение математических моделей. Общая задача линейного программирования. Матричная форма записи.

1. При производстве двух видов продукции используются 3 вида сырья. Составить план выпуска, обеспечивающий максимум прибыли. Исходные данные приведены в таблице.

Запасы сырья	Расход сырья на единицу продукции	
	Первый вид продукции	Второй вид продукции
30	1	3
48	4	3

60	3	3
Прибыль	70	60

Построить экономико-математическую модель задачи, дать необходимые комментарии к ее элементам и получить решение графическим методом.

2. В рационе животных используются два вида кормов. Животные должны получать 3 вида веществ (исходные данные приведены в таблице). Составить рацион кормления, обеспечивающий минимальные затраты.

Необходимое количество веществ	Содержание питательных веществ	
	№1	№2
15	5	1
12	2	1
7	1	1
Стоимость единицы корма	40	30

Построить экономико-математическую модель задачи, дать необходимые комментарии к ее элементам и получить решение графическим методом.

3. Решить графическим методом ЗЛП, заданную указанной математической моделью.

а) $F = 2x_1 - x_2 \to \max$, $\begin{cases} x_1 \le 3, \\ x_1 \ge -1, \\ -2x_1 - 3x_2 \le 6, \\ -x_1 + 2x_2 \le 6. \end{cases}$

б) $F = x_1 + 2x_2 \to \max$, $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 2x_1 + x_2 \le 8, \\ x_2 \le 2, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

в) $F = x_1 + x_2 \to \max$, $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 30, \\ 5x_1 - x_2 \le 25, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

г) $F = x_1 + 3x_2 \to \max$, $\begin{cases} x_1 + 4x_2 \geq 4, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 2, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$

4. Решить графическим методом ЗЛП, заданную указанной математической моделью.

а) $F = 5x_1 + 6x_2 \to \min$, $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 6, \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 12, \\ 4x_1 \geq 4, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$

б) $F = 2x_1 + x_2 \to \min$, $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \leq 9, \\ x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$

в) $F = 5x_1 - x_2 \to \min$, $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \leq 0, \\ -5x_1 + 9x_2 \leq 45, \\ x_1 - 2x_2 \leq 4, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$

г) $F = 5x_1 - 3x_2 \to \min$, $\begin{cases} 4x_1 - x_2 \geq 0, \\ -x_1 + x_2 \leq 3, \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 0, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$

РАЗДЕЛ 3. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

Функции многих переменных

Функции двух и нескольких переменных, способы задания, символика, область определения.

1. Найти область определения функции (показать на чертеже).

а) $z = \dfrac{1}{x^2 + y}$; б) $z = \dfrac{1}{x + y^2}$;

в) $z = \dfrac{x + y^2}{x^2 - y^2}$; г) $z = \dfrac{x + y^2}{x^2 - y}$;

д) $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$; е) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$;

ж) $z = \dfrac{5}{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}$; з) $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}$.

2. Найти область определения функции (показать на чертеже).

а) $z = \ln\sqrt{x + y}$; б) $z = \ln\sqrt{x - y}$;

в) $z = \ln\dfrac{1}{\sqrt{x + y}}$; г) $z = \ln\sqrt{\dfrac{x - y}{x + y}}$;

д) $z = \dfrac{1}{\sin x + \sin y}$; е) $z = \dfrac{1}{\sin x - \sin y}$;

ж) $z = \arcsin\left(x - y^2\right)$; з) $z = \arccos\left(x - y\right)$.

Пределы и непрерывность

Предел функции. Бесконечно малые функции. Метод эквивалентных бесконечно малых величин. Раскрытие неопределённости вида 0/0 и ∞/∞. Замечательные пределы. Непрерывность функции.

1. Вычислить пределы.

а) $\lim\limits_{x \to x_0}\left(x^2 + 4x - 6\right)$ при $x_0 = -1$, $x_0 = 0$, $x_0 = 1$;

б) $\lim\limits_{x \to x_0}\left(x^2 + 5x + 4\right)$ при $x_0 = -1$, $x_0 = 0$, $x_0 = 1$;

в) $\lim\limits_{x \to x_0}\left(3x^2 + 10x - 8\right)$ при $x_0 = -1$, $x_0 = 0$, $x_0 = 1$;

г) $\lim\limits_{x \to x_0}\left(x^3 - 2x^2 + 3\right)$ при $x_0 = -1$, $x_0 = 0$, $x_0 = 1$.

2. Вычислить пределы.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+5}{x^2-3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+9}{x^3-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^5+14}{4x^5-10}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^4+2}{10x^4-1}$.

3. Вычислить пределы.

а) $\lim\limits_{x\to7}\frac{(x-7)\sqrt{8-x}}{x^2-49}$; б) $\lim\limits_{x\to8}\frac{(x-8)\sqrt{2+x}}{x^2-64}$;

в) $\lim\limits_{x\to5}\frac{(5-x)\sqrt{x-1}}{x^2-25}$; г) $\lim\limits_{x\to6}\frac{(x-2)\sqrt{6-x}}{x^2-36}$;

д) $\lim\limits_{x\to3}\frac{(x-3)\sqrt{x+1}}{x^2-9}$; е) $\lim\limits_{x\to9}\frac{(x-9)\sqrt{x-6}}{x^2-81}$;

ж) $\lim\limits_{x\to-4}\frac{(x+4)\sqrt{1-x}}{16-x^2}$; з) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{(x-3)\sqrt{3+x}}{x^2-9}$;

и) $\lim\limits_{x\to-8}\frac{(x+8)\sqrt{2-x}}{x^2-64}$; к) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{(x+2)\sqrt{2-x}}{x^2-4}$.

4. Вычислить пределы.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+1}{x^2-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+27}{x^4-81}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+4x^2-5}{x^2-2x+1}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^4-4}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-81}{x^5-6x+9}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^6-1}{x^2-2x+1}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^4+2x+1}{3x^3-2}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+4x+1}{5x^3-4}$.

5. Вычислить пределы.

а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 7x}{7x}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\frac{4x}{\sin 4x}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin 5x}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}$;

д) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x}$; е) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin 4x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\sin 4x}$; з) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 5x}{\sin 4x}$;

и) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 6x}{\sin 5x}$; к) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\sin 5x}$.

6. Вычислить пределы.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{x}\right)^{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{5x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{2x}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{6x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+3}{3x+2}\right)^{x}$;

з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{x}$;

и) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}$;

к) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-8}{3x+7}\right)^{x+2}$.

7. Исследовать на непрерывность функцию.

а) $y=\frac{2}{x-1}$;

б) $y=\frac{3}{x+2}$;

в) $y=\frac{x-2}{x+1}$;

г) $y=\frac{x+3}{x+4}$;

д) $y=\frac{x^2-1}{x-1}$;

е) $y=\frac{x^2-9}{x+3}$;

ж) $y=\frac{x^2-16}{3x-12}$;

з) $y=\frac{2x^2-50}{x+5}$;

8. Исследовать на непрерывность функцию.

а) $f(x)=\begin{cases}1-x, x\le 0\\ 2x+1, x>0\end{cases}$;

б) $f(x)=\begin{cases}3-x, x<1\\ x^2+1, x\ge 1\end{cases}$;

в) $f(x)=\begin{cases}1-2x, x\le 0\\ x+1, x>0\end{cases}$;

г) $f(x)=\begin{cases}4-x^2, x<3\\ 2x-11, x>3\end{cases}$;

д) $f(x)=\begin{cases}x, x<-1\\ x^2+1, -1\le x<1;\\ 2x, x\ge 1\end{cases}$

е) $f(x)=\begin{cases}2-x, x<-1\\ x+4, -1\le x<2;\\ x^2, x\ge 2\end{cases}$

ж) $f(x)=\begin{cases}x+2, x\le -1\\ x^2+1, -1<x\le 1;\\ -x+3, x>1\end{cases}$

з) $f(x)=\begin{cases}x^2+1, x\le 0\\ 1+2x, 0<x<2.\\ x-2, x\ge 2\end{cases}$

РАЗДЕЛ 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИСЧИСЛЕНИЯ

Производная и дифференциал

Производная функции. Первый дифференциал функции, связь с приращением функции. Основные правила дифференцирования. Производные и дифференциалы высших порядков. Возрастание и убывание функций. Экстремумы функций. Частные производные функции нескольких переменных. Полный дифференциал. Частные производные высших порядков.

1. Найти приращение функции $f(x)$ в точке x_0.

а) $f(x) = x^2 + 3x + 1,\ x_0 = 1,\ \Delta x = 0{,}1;$

б) $f(x) = \dfrac{1}{x},\ x_0 = 2,\ \Delta x = 0{,}2;$

в) $f(x) = \sqrt{x},\ x_0 = 4,\ \Delta x = 0{,}41;$

г) $f(x) = \lg x,\ x_0 = 10,\ \Delta x = 0{,}3.$

2. Найти производные указанных функций, исходя из определения производной.

а) $y = 3x + 2;$ б) $y = 2x^2 - 3x;$

в) $y = x^2 - 2x + 3;$ г) $y = 2x^3 + 5x^2 - 7x - 4;$

д) $y = \dfrac{2}{x};$ е) $y = \dfrac{1}{x^3};$

ж) $y = \dfrac{x}{x+1};$ з) $y = \dfrac{x}{x+2};$

и) $y = \sqrt[3]{x};$ к) $y = \sqrt{x+1}.$

3. Найти производные функций.

а) $y = 4x^5 - \sqrt[3]{x} + 2x - 9 + \sin x;$ б) $y = 3x^5 - \sqrt[4]{x} - x - 1 + \cos x;$

в) $y = x^5 - 2\sqrt[4]{x} - x + 2 + e^x;$ г) $y = 2x^6 - 2\sqrt{x} + 3x - 1 - \log_4 x;$

д) $y = x^{10} - \sqrt[5]{x^3} + 3x - 9 + tgx;$ е) $y = 4x^8 - \sqrt[5]{x^2} + x - 19 + ctgx;$

ж) $y = 7x^6 - \sqrt[7]{x^2} + 4x - 11 + \ln x;$ з) $y = 3x^2 - \sqrt[5]{x^2} - 6x + 12 + \arcsin x;$

и) $y = 5x^2 - \sqrt[3]{x^2} + 7x - \arccos x;$ к) $y = 4x^5 - \sqrt[7]{x^4} - 12x + 6 - 7^x.$

4. Найти производные функций.

а) $y = \left(x^3 + 4\right)\cdot\left(x^2 - 3\right);$ б) $y = \left(x^3 - 2\right)\cdot\left(x^2 + 1\right);$

в) $y = \sqrt{x}\cdot(2x - 4);$ г) $y = \left(x^3 + 1\right)\cdot\sqrt{x};$

д) $y = x^2\cdot\cos x;$ е) $y = (2x + 3)\cdot\sin x;$

ж) $y=\left(x^2+2x+3\right)\cdot e^x$;

з) $y=\cos x\cdot e^x$;

и) $y=x^2\cdot\ln x$;

к) $y=x^2\cdot 2^x$;

л) $y=x\cdot\arcsin x$;

м) $y=\left(x^2+1\right)\cdot\mathrm{arc}\,tgx$.

5. Найти производные функций.

а) $y=\dfrac{6x+5}{4-3x}$;

б) $y=\dfrac{3x-7}{5-2x}$;

в) $y=\dfrac{3\sqrt{x}}{2x-9}$;

г) $y=\dfrac{-2\sqrt{x}}{8-3x}$;

д) $y=\dfrac{3^x}{3x}$;

е) $y=\dfrac{e^x}{x}$;

ж) $y=\dfrac{\ln x}{x}$;

з) $y=\dfrac{5x}{\ln x}$;

и) $y=\dfrac{tgx}{\sqrt{x}}$;

к) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{\cos x}$;

л) $y=\dfrac{\sin x}{\cos x-1}$;

м) $y=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$.

6. Найти значение производной функции в указанной точке x_0.

а) $y=x^3+2x+7,\ x_0=-1$;

б) $y=x+x^4+x^6,\ x_0=-1$;

в) $y=\dfrac{x}{3}-\dfrac{3}{x},\ x_0=3$;

г) $y=\dfrac{x+1}{x^2-5}+6x,\ x_0=3$;

д) $y=6\sqrt{x}+9x+4,\ x_0=9$;

е) $y=12\sqrt{x}-7x+5,\ x_0=4$;

ж) $y=4e^x+8x-1,\ x_0=0$;

з) $y=2e^x+4x-5,\ x_0=0$.

7. Найти значение производной функции в указанной точке x_0.

а) $y=\ln x-6x+4,\ x_0=\dfrac{1}{8}$;

б) $y=\ln x-4x+7,\ x_0=\dfrac{1}{2}$;

в) $y=\cos x+4x,\ x_0=\dfrac{3\pi}{2}$;

г) $y=8x+5\sin x,\ x_0=\pi$;

д) $y=\cos x-\dfrac{\pi}{2}\cdot x^2+1,\ x_0=\dfrac{\pi}{2}$;

е) $y=5-\pi\cdot x^3+\sin x,\ x_0=\pi$;

ж) $y=3x-2tgx,\ x_0=0$;

з) $y=ctgx-3x,\ x_0=\dfrac{\pi}{2}$.

8. Найти производные второго порядка от указанных функций.

а) $y=3x^4-5x^3+2x^2-x$;

б) $y=4x^8-2x^5+6x^3+3x$;

в) $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$;

г) $y=\dfrac{2x^3}{3-x^3}$;

д) $y=(2x+5)^3$; е) $y=(3x-1)^4$;

ж) $y=x\cdot\sin 2x$; з) $y=e^x\cdot\cos 3x$.

9 Материальная точка движется прямолинейно по закону $X=X(t)$ (где x – расстояние от точки отсчета в метрах, t - время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени t_0.

а) $X(t)=t^2-3t-29$, $t_0=3$; б) $X(t)=t^2-7t-20$, $t_0=5$;

в) $X(t)=-t^2+7t-4$, $t_0=1$; г) $X(t)=t^2+7t+3$, $t_0=9$;

д) $X(t)=t^2-3t-2$, $t_0=8$; е) $X(t)=t^2+5t-16$, $t_0=2$;

ж) $X(t)=\frac{1}{6}t^2+4t-20$, $t_0=6$; з) $X(t)=\frac{1}{2}t^2-t+14$, $t_0=3$;

и) $X(t)=\frac{1}{3}t^2+7t+13$, $t_0=6$; к) $X(t)=\frac{1}{4}t^2+3t+29$, $t_0=2$;

л) $X(t)=-\frac{1}{2}t^2+9t-29$, $t_0=7$; м) $X(t)=\frac{1}{5}t^2+9t-25$, $t_0=5$.

10. Вычислить производительность труда во время первых 4 часов работы, если объем продукции y в течение рабочего дня представлен функцией и сделать выводы.

а) $y=5t^3+30t^3+10t$, t - время, ч.;

б) $y=4t^3+20t^2+20t$, t - время, ч.;

в) $y=5t^2+10t^3+100t$, t - время, ч.;

г) $y=-t^3+20t^2+40t$, t - время, ч.;

д) $y=-3t^3+20t^2+100t$, t - время, ч.;

е) $y=-4t^3+20t^2+40t$, t - время, ч..

11. Предприятие производит x единиц некоторой однородной продукции в месяц. Установлено, что зависимость финансовых накоплений предприятия от объема выпуска выражается формулой $y=f(x)$. Исследовать потенциал предприятия.

а) $y=-0{,}05x^3+1200x-7000$; б) $y=-0{,}02x^3+600x-1000$.

12. Цементный завод производит X тонн цемента в день. По договору он должен ежедневно поставлять строительной фирме не менее 20 тонн цемента. Производственные мощности завода таковы, что выпуск цемента не может превышать 90 тонн в день. Определить, при каком объеме производства удельные затраты будут наибольшими (наименьшими), если функция затрат имеет вид: $K=-x^3+98x^2+200x$.

13. Найти дифференциал функции.

а) $y = x^4$;

б) $y = x$;

в) $y = 3x^2 - 4x$;

г) $y = 2x^2 + 4x$;

д) $y = \ln x + \frac{5}{x}$;

е) $y = e^x - \frac{3}{\sqrt{x}}$;

ж) $y = x^3 \cdot \ln x$;

з) $y = 6^x \cdot ctgx$;

и) $y = 4x^3 \cdot \cos x$;

к) $y = e^x \cdot \left(4x - x^3\right)$;

л) $y = \frac{2x^2 - 5}{2x^2 + 3}$;

м) $y = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 5}$.

14. Найти дифференциал функции.

а) $y = (2x - 1)^4$;

б) $y = \left(x^3 + 2\right)^{15}$;

в) $y = \sqrt{5x - 6}$;

г) $y = \sqrt{x^2 + 4}$;

д) $y = \ln\left(1 - x^2\right)$;

е) $y = e^{2x+8}$;

ж) $y = 4 \cdot tg5x$;

з) $y = 5 \cdot \sin 6x$;

и) $y = \cos(5x - 3)$;

к) $y = tg(3x + 4)$.

15. Найти дифференциал функции и вычислить его значение при заданных x и Δx.

а) $y = x^2 - x + 1$, $x = 2$, $\Delta x = 0{,}1$;

б) $y = 2x^3 + 5x$, $x = 1$, $\Delta x = 0{,}01$;

в) $y = \sqrt{1 + x^2}$, $x = 0$, $\Delta x = -0{,}02$;

г) $y = \ln 3x$, $x = 0{,}5$, $\Delta x = -0{,}2$.

16. Найти интервалы возрастания и убывания функций.

а) $y = x^2 - 6x + 8$;

б) $y = x^4 - 2x^3 + 5$;

в) $y = x^3 - 9x^2 - 21x + 1$;

г) $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$;

д) $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$;

е) $y = 12x + 3x^2 - 2x^3$;

ж) $y = \frac{-x^2 + 6x - 18}{x^2}$;

з) $y = \frac{x^2 + x - 4}{x^2}$.

17. Исследовать функции на экстремум.

а) $y = x^2 - 4x + 5$;

б) $y = 3 + 8x - 2x^2$;

в) $y = x^3 - 9x^2 + 15x - 2$;

г) $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 1$;

д) $y = \frac{x^4 - 1}{x^2}$;

е) $y = \frac{2x^2 - 1}{x^4}$;

ж) $y = \sqrt{2x - 5}$;

з) $y = \sqrt{2x - 6}$;

и) $y = x - \ln(1 + x)$;

к) $y = x - \ln\left(1 + x^2\right)$.

18. Исследовать функции на экстремум с помощью второй производной.

а) $y=2x^2-3$;

б) $y=x^2-2x$;

в) $y=2x^2-5x+2$;

г) $y=-x^2+4x+1$;

д) $y=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+3x+4$;

е) $y=x^3-\dfrac{9}{2}x^2+6x-2$;

ж) $y=\dfrac{x^2+1}{x}$;

з) $y=\dfrac{3x}{x^2+1}$.

19. Найти частные производные первого и второго порядков.

а) $z=-x^2-y^2+2x-8y-9$;

б) $z=y-e^x x$;

в) $z=x^2+y^2+xy-3x-3y-6$;

г) $z=y+e^x x$;

д) $z=-x^2+y^2-xy+7x+8y-10$;

е) $z=2y+e^x x$;

ж) $z=x^2-y^2+xy+8x-4y+15$;

з) $z=2y-e^x x$.

20. Исследовать функцию на экстремумы.

а) $z=-x^2-y^2-xy+3x+3y+6$;

б) $z=x^2+y^2-6x-8y+12$;

в) $z=-x^2-y^2-xy+7x+8y-10$;

г) $z=x^2+y^2-xy+8x-4y+15$;

д) $z=x+e^x y$;

е) $z=x-e^x y$.

РАЗДЕЛ 5. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Неопределенный интеграл

Первообразная функция и неопределённый интеграл. Основные правила неопределённого интегрирования.

1. Найти интегралы непосредственным интегрированием, используя свойства и таблицу интегралов.

а) $\int\left(6x^2+8x-\frac{3}{x}+5\right)dx$; б) $\int\left(13^x+x-\frac{5}{\cos^2 x}+1\right)dx$;

в) $\int\left(4^x+12x-\frac{3}{x}+\sin x\right)dx$; г) $\int\left(5x^4-\cos x+10x+e^x\right)dx$;

д) $\int\left(7x^6-11-\frac{3}{\sin^2 x}+x\right)dx$; е) $\int\left(2x^3-3x^2+4x-\frac{5}{x}+6\right)dx$;

ж) $\int\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)dx$; з) $\int\left(\frac{2}{x}-\frac{3}{x^4}+\frac{4}{x^5}\right)dx$.

2. Найти интегралы непосредственным интегрированием, используя свойства и таблицу интегралов.

а) $\int\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)dx$; б) $\int\left(\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{x\sqrt{x}}{4}\right)dx$;

в) $\int\left(x^5+3x+\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt[4]{x}}\right)dx$; г) $\int\left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}+x\sqrt[4]{x}\right)dx$;

д) $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}+\frac{x^2}{\sqrt{x}}\right)dx$; е) $\int\left(\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+2\right)dx$.

3. Найти интегралы непосредственным интегрированием, используя свойства и таблицу интегралов.

а) $\int\left(\frac{10x^8+3}{x^4}\right)dx$; б) $\int\left(\frac{x-2}{x^3}\right)dx$;

в) $\int\left(\frac{2x+3}{x^4}\right)dx$; г) $\int\frac{\left(x^2+1\right)^2}{x^3}dx$;

д) $\int\frac{\left(x^2-2\right)^2}{x^2}dx$; е) $\int\left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$.

4. Найти интегралы заменой переменной интегрирования.

а) $\int\sqrt{2-5x}dx$; б) $\int\sqrt{4x+6}dx$;

в) $\int\frac{dx}{\sqrt{4-6x}}$; г) $\int\frac{dx}{\sqrt{5x+2}}$;

д) $\int(2x+5)^{10}dx$; е) $\int(3-x)^{4}dx$.

5. Найти интегралы заменой переменной интегрирования.

а) $\int e^{-4x+5}dx$; б) $\int 4^{3-2x}dx$;

в) $\int\cos 5xdx$; г) $\int\sin 2xdx$;

д) $\int\cos(3x+5)dx$; е) $\int\sin(7x+8)dx$.

6. Применяя метод интегрирования по частям, найти следующие интегралы.

а) $\int(x+2)e^{x}dx$; б) $\int(4-x)e^{x}dx$;

в) $\int(x-7)\sin xdx$; г) $\int(3-2x)\cos xdx$;

д) $\int\ln xdx$; е) $\int\ln(5-4x)dx$;

ж) $\int arctgxdx$; з) $\int\arcsin xdx$.

7. Найти интегралы от рациональных дробей.

а) $\int\frac{dx}{x-12}$; б) $\int\frac{dx}{4x+8}$;

в) $\int\frac{6}{x+4}dx$; г) $\int\frac{3}{2x-6}dx$;

д) $\int\frac{4}{5x+3}dx$; е) $\int\frac{2}{x-3}dx$;

ж) $\int\frac{dx}{(3x-2)^{2}}$; з) $\int\frac{dx}{(3x+4)^{2}}$;

и) $\int\frac{5}{(x-2)^{3}}dx$; к) $\int\frac{4}{(2x+3)^{3}}dx$;

л) $\int\frac{10}{(2x-5)^{4}}dx$; м) $\int\frac{12}{(3x+8)^{4}}dx$.

Определенный интеграл

Задача нахождения площади криволинейной трапеции. Определённый интеграл. Формула Ньютона-Лейбница. Основные свойства определённого интеграла.

1. Найти интегралы непосредственным интегрированием, используя свойства и таблицу интегралов.

а) $\int_{-1}^{2} x^2(3-x)dx$; б) $\int_{-1}^{1} x(5+x)dx$;

в) $\int_{0}^{2} x\left(4x^2+3x-2\right)dx$; г) $\int_{0}^{2} x\left(x^2+4x-1\right)dx$;

д) $\int_{1}^{5}\left((x-2)^2-1\right)dx$; е) $\int_{1}^{4}\left((x-3)^2-4\right)dx$;

ж) $\int_{0}^{2}\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$; з) $\int_{0}^{2}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

2. Найти интегралы заменой переменной интегрирования.

а) $\int_{0}^{1}(x+1)^5dx$; б) $\int_{0}^{1}\left(7x^2-5\right)^4dx$;

в) $\int_{1}^{4}\sqrt{x^2-1}dx$; г) $\int_{0}^{1}\sqrt{x-32}dx$;

д) $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{4-3x}}$; е) $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{10-3x}}$.

ж) $\int_{-2}^{2}e^{2x+1}dx$; з) $\int_{1}^{2}e^{3x+2}dx$;

и) $\int_{0}^{1}5^{2x-1}dx$; к) $\int_{-1}^{1}9^{6x-1}dx$;

л) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin 4xdx$; м) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\cos 3xdx$.

3. Применяя метод интегрирования по частям, найти следующие интегралы.

а) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}2x\cos xdx$; б) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}4x\sin xdx$;

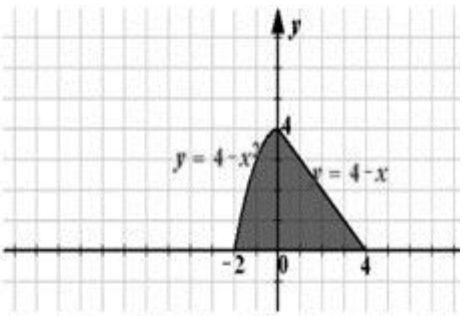
в) $\int_1^e (x+1)\ln x dx$;　　г) $\int_0^e (x+2)\ln x dx$;

д) $\int_0^1 (x^2-1)e^x dx$;　　е) $\int_0^1 (x^2-1)e^{3x} dx$;

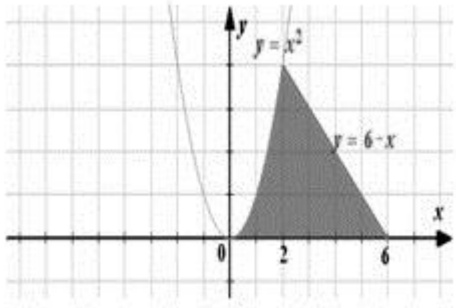
ж) $\int_0^1 \arcsin x dx$;　　з) $\int_{-1}^1 x\arcsin x dx$.

4. Вычислить площадь заштрихованной фигуры.

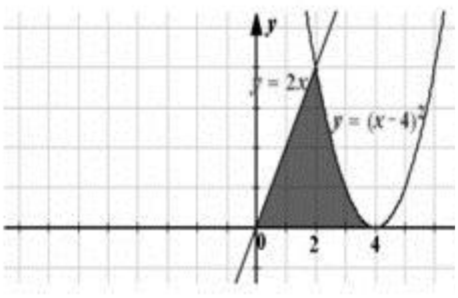
а)



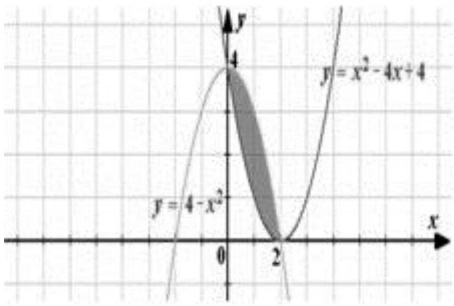
б)



в)



г)



5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.

а) $y=-x^2$, $y=x$, $y=0$;　　б) $y=x^2-2$, $y=x$;

в) $y=4-x^2$, $y=x^2-2x$;　　г) $y=-x^2+x+4$, $y=-x+1$;

д) $y=x^2+2x$, $y-2x=1$;　　е) $y=\sqrt{x}$, $y=6-x$, $y=0$;

ж) $y=(x+2)^2$, $y=4$;　　з) $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$.

6. Вычислить объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций вокруг оси Ox.

а) $y=1-x^2$, $y=0$;　　б) $y=x^2$, $y^2-x=0$;

в) $y=2x-x^2$, $y=0$;　　г) $y^2=9x$, $y=3x$;

д) $y=4x-x^2$, $y=x$;　　е) $y=x^2$, $y^2=x$.

7. Вычислить объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций вокруг оси Oy.

а) $y=x^3$, $y=0$, $y=8$;　　б) $y=\frac{x^2}{2}$, $x=0$, $y=2\sqrt{2}$;

в) $y=x^3$, $y=8$, $y=-8$; г) $y=x^2+1$, $x=1$, $x=2$, $y=0$;

д) $y^2=4-x$, $x=0$; е) $y=x^2$, $y=x$.

8. Скорость движения тела задана уравнением $v=v(t)$. Найти путь, пройденный телом за t секунд от начала движения.

а) $v=4t+5$, $t=5$; б) $v=t+6$, $t=4$;

в) $v=9t^2-8t$, $t=4$; г) $v=6t^2+2t$, $t=5$;

д) $v=t^3+5$, $t=2$; е) $v=\dfrac{5}{\sqrt{t}}$, $t=9$.

9. Скорость поезда, движущегося под уклон, задана уравнением $v=v(t)$. Вычислите длину уклона, если поезд прошел его за t секунд.

а) $v=15+0,2t$, $t=15$; б) $v=14+0,3t$, $t=13$.

10. Поезд движется прямолинейно со скоростью $v=v(t)$ (м/с). Найти длину пути, пройденного поездом от начала движения до остановки.

а) $v=6t-t^2$; б) $v=12t-3t^2$.

11. Скорость движения тела изменяется по закону $v=v(t)$ м/с. Найти длину пути, пройденного телом за 3-ю секунду его движения.

а) $v=2t$; б) $v=3t$;

в) $v=6t+4$; г) $v=8+2t$.

12. Тело брошено вертикально вверх со скоростью, которая изменяется по закону $v=v(t)$ м/с. Найти наибольшую высоту подъема.

а) $v=29,4-9,8t$; б) $v=25,6-6,4t$.

13. Два тела одновременно выходят из одной точки: одно – со скоростью $v_1=v_1(t)$ м/с, другое – со скоростью $v_2=v_2(t)$ м/с. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через t с, если движутся по прямой в одном направлении?

а) $v_1=5t$, $v_2=3t^2$, $t=20$; б) $v_1=7t$, $v_2=4t^2$, $t=10$.

14. Задана функция предельных издержек $f(x)=2x^2-2x+90$. Найти функцию издержек $F=F(x)$ и вычислить издержки на изготовление 15 ед. товара.

15. Пусть $f(t)=-3t^2+18t$ - производительность труда. Определить выработку рабочего:

а) за весь рабочий день;

б) за третий час работы;

в) за последний час работы, если продолжительность рабочего дня 6 часов;

г) провести экономический анализ задачи.

16. Производительность труда рабочего времени в течение смены приблизительно выражается функцией $y=-0,0033x^2-0,089x+20,96$, где x – время (ч), $x\in[0;8]$. Вычислить объем выпуска продукции в течение месяца, если количество рабочих дней равно 24.

Несобственный интеграл

Интегрирование по бесконечному промежутку. Интегрирование неограниченных функций.

1. Найти несобственные интегралы.

а) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x+8}$; б) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$;

в) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{(x+1)dx}{x^2+2x+2}$; г) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{(x+2)dx}{x^2+4x+8}$;

д) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^2dx}{5+x^6}$; е) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^3dx}{2+x^4}$;

ж) $\int\limits_e^{+\infty}\frac{\ln x dx}{x}$; з) $\int\limits_e^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}$.

2. Найти несобственные интегралы.

а) $\int\limits_0^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $\int\limits_1^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$;

в) $\int\limits_1^{2}\frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}}$; г) $\int\limits_0^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)^2}}$;

д) $\int\limits_0^{1}\frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2}$; е) $\int\limits_{-1}^{0}\frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2}$;

ж) $\int\limits_1^{e}\frac{dx}{x\ln x}$; з) $\int\limits_0^{e}\frac{\ln x dx}{x}$.

Дифференциальные уравнения

Примеры задач, приводящих к дифференциальным уравнениям. Основные понятия и определения.

1. Определить порядок заданных дифференциальных уравнений.

а) $y' + 3x^3 = 2xy$; б) $y''' + 5y' - 9xy^4 = 0$;

в) $y^3 - 7x^5 y \cos x = 0$; г) $\sqrt{1-\cos x}dx + \sqrt{1-\sin y}dy = 0$;

д) $y\sqrt{x} = y'$; е) $xy - y^4 = 0$;

ж) $xy' - y = \cos x$; з) $xy = y'''$.

2. Установите соответствие между дифференциальным уравнением и его видом.

1) $xy' - y^2 \ln x + y = 0$;

2) $\sqrt{x^2 + y^2} = y - xy'$;

3) $xy' - y = x^2 \cos x$;

4) $y' = tgxtgy$.

а) дифференциальное уравнение в частных производных;

б) линейное дифференциальное уравнение;

в) однородное дифференциальное уравнение;

г) дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными;

д) дифференциальное уравнение Бернулли.

3. Установите соответствие между дифференциальным уравнением и его видом.

1) $y' + 2xy = x^2 e^{-x^2}$;

2) $y' + xy + (2-x)e^x y^2 = 0$;

3) $(1+x^2)dy + ydx = 0$;

4) $xy' \sin\dfrac{y}{x} + x = y \sin\dfrac{y}{x}$.

а) дифференциальное уравнение в частных производных;

б) линейное дифференциальное уравнение;

в) однородное дифференциальное уравнение;

г) дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными;

д) дифференциальное уравнение Бернулли.

4. Разделить переменные в уравнениях.

а) $x^2(y^3+5)dx + (x^3+5)dy = 0$; б) $(x^2 y - y)dy + (xy^2 + x)dx = 0$;

в) $y' = \frac{x}{y}$;   г) $y' = \frac{x}{\sin y}$;

д) $y' = y^2\sqrt{4x^2 - 1}$;   е) $y' = \left(1 + x^2\right)\left(1 - y^2\right)$.

5. Найти решение (общий интеграл) дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

а) $2ydy - 3x^2dx = 0$;   б) $9y^2dy - 4xdx = 0$;

в) $xydx + (x+1)dy = 0$;   г) $x^2dy + (y-1)dx = 0$;

д) $(x + xy)dx + (x - xy)dy = 0$;   е) $\left(x^2 + 1\right)dy - x(1 + y)dx = 0$;

ж) $x\sqrt{1 - y^2}dx + y\sqrt{1 - x^2}dy = 0$;   з) $\sqrt{1 + y^2}dx = y\sqrt{1 - x^2}dy$;

и) $\sqrt{y^2 + 1}dx = xydy$;   к) $\sqrt{4 + y^2}dx = \left(x^2y + y\right)dy$.

6. Найти решение (общий интеграл) дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

а) $ydx - e^x\left(2y^2 + 1\right)dy = 0$;   б) $\left(e^x + e^{x+y}\right)dx - e^ydy = 0$;

в) $\sin xdx + 4y^3dy = 0$;   г) $3x^2dx + \cos ydy = 0$;

д) $3y^2y' = 3x^2 + 1$;   е) $x^2(2y - 1)y' = \left(x^2 - 1\right)$;

ж) $yy' + x = 1$;   з) $xy' - y = 0$;

и) $2xy' = 1 - y^2$;   к) $2x^2yy' = 2 - y^2$;

л) $x(x-1)y' + y = y^2$;   м) $\left(x^2 - 1\right)y' + 2xy^2 = 0$.

7. Найти общее решение однородного дифференциального уравнения.

а) $(x + 2y)dx - xdy = 0$;   б) $\left(y^2 - 2xy\right)dx + x^2dy = 0$;

в) $\left(xy + y^2\right)dx - x^2dy = 0$;   г) $\left(y + \sqrt{xy}\right)dx = xdy$;

д) $x^2y' = y^2 + 12x^2 + 8xy$;   е) $x^2y' = y^2 + 4xy + 2x^2$;

ж) $y' = \frac{x + y}{x}$;   з) $y' = \frac{-3x + y}{x}$;

и) $y' = \frac{x + 8y}{8x + y}$;   к) $y' = \frac{2y + x}{2x - y}$;

л) $y' = \frac{x^3 + y^3}{xy^2}$;   м) $y' = \frac{3y^3 - x^3}{3xy^2}$;

н) $y' = \frac{x + y}{y - x} + \frac{y}{x} - 1$;   о) $y' = \frac{x^2}{y^2 - x^2} + \frac{y}{x}$.

8. Если в дифференциальном уравнении $y' = F(x,y)$ функцию $F(x,y)$ можно записать в виде $f\left(\frac{y}{x}\right)$, то дифференциальное уравнение $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ называется дифференциальным уравнением первого порядка с однородной правой частью. Подстановка $y = u \cdot x$ сводит решение этого уравнения к решению уравнения с разделяющимися переменными вида $P(u)du + Q(x)dx = 0$. Для однородного уравнения $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ найти соответствующее уравнение с разделяющимися переменными.

а) $y' = \frac{4x+y}{x}$; б) $y' = \frac{-2x+y}{x}$;

в) $y' = \frac{3x}{x+y}$; г) $y' = \frac{-5x}{x+y}$;

д) $y' = \frac{y}{x} - 1$; е) $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$;

ж) $y' = \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y}{x}$; з) $y' = \frac{-x^2+6y^2}{x^2} + \frac{y}{x}$.

9. Линейное дифференциальное уравнение можно решить с помощью подстановки $y = u \cdot v$, где функция $v = v(x)$ подбирается так, чтобы после подстановки получилось уравнение с разделяющимися переменными. Найти общее решение уравнения.

а) $y' + 2y - 1 = 0$; б) $y' - 3y + 3 = 0$;

в) $y' + \frac{y}{x} = 3x$; г) $y' - \frac{y}{x} = x$;

д) $y' + y - e^{-x} = 0$; е) $y' - y - e^{x} = 0$.

10. Дифференциальное уравнение вида $y' + P(x) \cdot y = Q(x)$ называется дифференциальным уравнением первого порядка. Для его решения используют подстановку: $y = u \cdot v$, тогда $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Сделав подстановку в исходное уравнение, выносят за скобки u и выражение, стоящее в скобках, приравнивают к нулю. Из полученного уравнения находят v. Остается решить дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Найти функцию v для дифференциального уравнения.

а) $y' + x^2 \cdot y = 3x$; б) $y' + y \cdot x^3 = 5x^2$;

в) $y' + \frac{y}{x} = x^3$; г) $y' + y \cdot \frac{x+1}{x} = 2x^2$;

д) $y' + 7y \cdot x = e^{x}$; е) $y' - e^{x} \cdot y = x^3$;

ж) $y' + y \cdot \sin x = \cos x$;

з) $y' - y \cdot \cos x = \sin x$.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Гончаренко, В.М. Элементы высшей математики [Электронный ресурс]: учебник / Гончаренко В.М., Липагина Л.В., Рылов А.А. – Москва : КноРус, 2019. – 363 с. – Режим доступа: https://book.ru/book/931506

2. Высшая математика [Электронный ресурс]: учебник и практикум / М. Б. Хрипунова [и др.] ; под общей редакцией М. Б. Хрипуновой, И. И. Цыганок. – Москва : Издательство Юрайт, 2019. – 472 с. – Режим доступа: https://biblio-online.ru/bcode/437476

3. Бардушкин, В.В. Математика. Элементы высшей математики[Электронный ресурс]: учебник: в 2 т. Т. 2 / В.В. Бардушкин, А.А. Прокофьев. – М.: КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2018. – 368 с. – Режим доступа : https://new.znanium.com/read?id=329558

4. Математика [Электронный ресурс] : учебник / О. В. Татарников [и др.] ; под общей редакцией О. В. Татарникова. – Москва : Издательство Юрайт, 2019. – 450 с. – Режим доступа: https://biblio-online.ru/bcode/433901

5. Математика. Практикум [Электронный ресурс]: учебное пособие / О. В. Татарников [и др.] ; под общей редакцией О. В. Татарникова. – Москва : Издательство Юрайт, 2019. – 285 с. – Режим доступа: https://biblio-online.ru/bcode/433902

6. Баврин, И. И. Математика [Электронный ресурс]: учебник и практикум / И. И. Баврин. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : Издательство Юрайт, 2019. – 616 с. – Режим доступа: https://biblio-online.ru/bcode/426511

7. Седых, И. Ю. Математика [Электронный ресурс]: учебник и практикум / И. Ю. Седых, Ю. Б. Гребенщиков, А. Ю. Шевелев. – Москва : Издательство Юрайт, 2019. – 443 с. – Режим доступа: https://biblio-online.ru/bcode/433707

8. Численные методы [Электронный ресурс]: учебник и практикум / У. Г. Пирумов [и др.] ; под редакцией У. Г. Пирумова. – 5-е изд., перераб. и доп. – Москва : Издательство Юрайт, 2019. – 421 с. – Режим доступа: https://biblio-online.ru/bcode/445775

ПРИЛОЖЕНИЕ

Краткий справочный материал

Формулы сокращенного умножения

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1, x_2 – корни квадратного уравнения

Квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

$$D = b^2 - 4ac, \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Определитель второго порядка

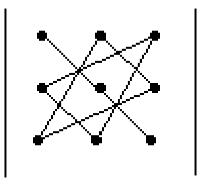
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Определитель третьего порядка

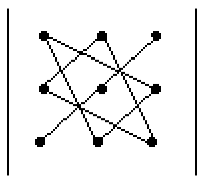
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

Это правило легко запомнить, пользуясь схемой, которая называется правилом треугольников:

1) « + »



2) « – »



Обратная матрица

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot A^{П}=\frac{A^{П}}{|A|},$$

где $|A|$ – определитель данной матрицы;

$A^{П}$ – присоединенная матрица к матрице A.

Проверка: $A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=E$.

Правило Крамера

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}.$$

1) Вычислим основной определитель матрицы Δ:

$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, убеждаемся, что он отличен от нуля.

2) Вычислим основной определитель матрицы Δ_1:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

3) Вычислим основной определитель матрицы Δ_2:

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}.$$

4) Вычислим основной определитель матрицы Δ_3:

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

5) Найдем корни системы уравнений x_1, x_2, x_3:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Комплексные числа

1. $z=a+bi$ – алгебраическая форма записи комплексного числа, где $a=\operatorname{Re}z$ действительная часть, $b=\operatorname{Im}z$ – мнимая часть.

2. $z=a+bi$ и $\overline{z}=a-bi$ – сопряженные комплексные числа.

3. $z_1=z_2 \Leftrightarrow a_1=a_2$ и $b_1=b_2$.

Арифметические действия над комплексными числами

1. $z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$.
2. $z_1 - z_2 = (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$.
3. $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2 i + a_2 \cdot b_1 i + b_1 \cdot b_2 i^2 =$
$= a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2 i + a_2 \cdot b_1 i - b_1 \cdot b_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)i.$
4. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a_1 a_2 - b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \dfrac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$.

Правила вычисления пределов

1. $\lim\limits_{x\to a} C = C, C - const$;
2. $\lim\limits_{x\to a} cu(x) = c \lim\limits_{x\to a} u(x)$, где $c - const$;
3. $\lim\limits_{x\to a} \left[f(x) + g(x) - h(x) \right] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) - \lim\limits_{x\to a} h(x)$;
4. $\lim\limits_{x\to a} \left[f(x) \cdot g(x) \cdot h(x) \right] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} h(x)$;
5. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, где $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$.

Замечательные пределы

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ – первый замечательный предел;

Следствия:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$;
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(ax)}{\sin(bx)} = \dfrac{a}{b}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tgx}{x} = 1$;
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{arc\sin x}{x} = 1$;
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{arctgx}{x} = 1$.

$\lim\limits_{x\to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x} \right)^x = e$ или $\lim\limits_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$ – второй замечательный предел;

Следствия:

1. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1 + \dfrac{a}{x} \right)^{bx} = e^{ab}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{x} = 1$;
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

Непрерывность функции в точке

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Равенство означает выполнение трех условий:

1) функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 и в ее окрестности;

2) функция $y = f(x)$ имеет предел при $x \to x_0$;

3) предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке, то есть выполняется равенство $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Приращение аргумента, приращение функции

$\Delta x = x - x_0$ – приращение аргумента;

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ – приращение функции.

Определение производной

$$y'(x_0) = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Геометрический смысл производной

$$y'(x) = tg\alpha .$$

1) если $f'(x_0) = tg\alpha > 0$, то касательная направлена вправо вверх, и функция возрастает;

2) если $f'(x_0) = tg\alpha < 0$, то касательная направлена вправо вниз, и функция убывает;

3) если $f'(x_0) = tg\alpha = 0$, то касательная является горизонтальной прямой, и x_0 – критическая точка.

Механический смысл производной

$$v(t) = x'(t).$$

Таблица производных основных элементарных функций

1. $(x^n)' = nx^{n-1}$,
2. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$,
3. $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$,
4. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$,
5. $(e^x)' = e^x$,
6. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$,
7. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$,
8. $(\sin x)' = \cos x$,
9. $(\cos x)' = -\sin x$,
10. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$,
11. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$,
12. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
13. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
14. $(\mathrm{arctgx})' = \dfrac{1}{1+x^2}$,
15. $(\mathrm{arcctgx})' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Правила дифференцирования

1. $\left(C \cdot f(x)\right)' = C\left(f(x)\right)'$;
2. $\left(f(x) + g(x) - h(x)\right)' = f'(x) + g'(x) - h'(x)$;
3. $\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$;
4. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$, $g(x) \neq 0$.

Производные высших порядков

1. $y''(x) = f''(x) = (f')'$;
2. $y'''(x) = f'''(x) = (f'')'$;
3. $y^{(n)}(x) = \left(y^{(n-1)}(x)\right)'$.

Дифференциал функции

$$dy = y'(x)dx.$$

Первообразная функции

$F'(x) = f(x)$.

Неопределенный интеграл

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Таблица основных неопределенных интегралов

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$.
2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.
3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.
4. $\int e^x dx = e^x + C$.
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$.
7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$.
8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C$.
9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$.
10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$
11. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} \mathrm{arctg} \dfrac{x}{a} + C$.
12. $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C$.

Основные свойства неопределенного интеграла

1. $\int kf(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$;
2. $\int \left[f(x) \pm g(x)\right]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$;
3. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;
4. $\int df(x)dx = f(x) + C$;
5. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то и $\int f(t)dt = F(t) + C$, где $t = \varphi(x)$ – произвольная функция, имеющая непрерывную производную.

Интегрирование заменой переменной

$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$.

Метод внесения под знак дифференциала

$f'(x)dx = d(f(x))$.

При внесении под знак дифференциала необходимо иметь в виду простейшие преобразования дифференциала:

$$dx = d(x+a),\ a = \text{const} \qquad \sin x dx = -d(\cos x)$$

$$dx = \frac{1}{a}d(ax),\ a \neq 0 - \text{const} \qquad \frac{dx}{x} = d(\ln x)$$

$$xdx = \frac{1}{2}d\left(x^2\right) \qquad \frac{dx}{x^2} = -d\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$xdx = \frac{1}{2}d\left(x^2+a\right),\ a = \text{const} \qquad \frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x)$$

$$\cos x dx = d(\sin x)$$

Очень часто метод внесения под знак дифференциала используют для нахождения интегралов вида:

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}\int f(kx+b)d(kx+b) = \frac{1}{k}F(kx+b)+C.$$

Поэтому имеют место следующие формулы для неопределенных интегралов:

$$\int (kx+b)^n dx = \frac{1}{k}\cdot\frac{(kx+b)^{n+1}}{n+1}+C \qquad \int a^{kx+b}dx = \frac{1}{k}\cdot\frac{a^{kx+b}}{\ln a}+C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{kx+b}} = \frac{1}{k}\cdot 2\sqrt{kx+b}+C \qquad \int \sin(kx+b)dx = -\frac{1}{k}\cos(kx+b)+C$$

$$\int \frac{dx}{(kx+b)^2} = -\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{kx+b}+C \qquad \int \cos(kx+b)dx = \frac{1}{k}\sin(kx+b)+C$$

$$\int \frac{dx}{kx+b} = -\frac{1}{k}\ln|kx+b|+C \qquad \int \frac{1}{\cos^2(kx+b)}dx = \frac{1}{k}\operatorname{tg}(kx+b)+C$$

$$\int e^{kx+b}dx = \frac{1}{k}e^{kx+b}+C \qquad \int \frac{1}{\sin^2(kx+b)}dx = -\frac{1}{k}\operatorname{ctg}(kx+b)+C$$

Метод интегрирования по частям

$$\int udv = u\cdot v - \int vdu;$$

$$\int \underbrace{P(x)}_{u}\cdot\underbrace{\left\{\begin{matrix} e^{kx} \\ \sin kx \\ \cos kx \end{matrix}\right\}dx}_{dv};$$

$$\int \underbrace{\begin{Bmatrix} \ln kx \\ \arcsin kx \\ \arccos kx \\ arctgkx \\ arcctgkx \end{Bmatrix}}_{u} \cdot \underbrace{P(x)\,dx}_{dv}.$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

1. Интегрирование дроби I типа:

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{dx}{x-a} = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C;$$

2. Интегрирование дроби II типа:

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = A\int \frac{dx}{(x-a)^n} = A\int (x-a)^{-n} d(x-a) = A\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C =$$

$$= -\frac{A}{(n-1)\cdot(x-a)^{n-1}} + C.$$

Определенный интеграл

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

Свойства определенного интеграла

1. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(y)dy$;
2. $\int_a^a f(x)dx = 0$;
3. $\int_a^b C\cdot dx = C(b-a)$;
4. $\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$;
5. $\int_a^b \left[f(x)+g(x)-h(x)\right]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx - \int_a^b h(x)dx$;
6. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;
7. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Геометрическое приложение определенного интеграла

$S = \int_a^b f(x)dx$ – площадь плоской фигуры;

$V_x = \pi\int_a^b y^2(x)\,dx$ – объем тела вращения вокруг оси Ox;

$V_y = \pi\int_c^d x^2(y)\,dy$ – объем тела вращения вокруг оси Oy;

$l = \int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$ – длина дуги кривой.

Физическое приложение определенного интеграла

$S = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$ – вычисление пройденного пути по скорости;

$A = \int_a^b F(s)ds$ – вычисление работы переменной силы.

Дифференциальные уравнения

1. $y' = f(x) \Rightarrow y(x) = \int f(x)dx$;

2. $f(x)\cdot y' = g(x) \;\Rightarrow\; y = \int \dfrac{g(x)}{f(x)}dx$;

3. $g(y)dy = f(x)dx$ или $g(y)\cdot y' = f(x) \Rightarrow \int g(y)dy = \int f(x)dx$;

4. $y' = f(ax+by)$, $a,b \in R$ сделать замену $ax+by=t$;

5. $y' = f(x,y)$ решение данных уравнений ищется с помощью подстановки $y(x) = xz(x)$ откуда $y'(x) = z(x) + xz'(x)$;

6. $y' + f(x)y = g(x)$ интегрирующий множитель определяется формулой $u(x) = e^{\int f(x)dx} \;\Rightarrow\; y(x) = \int u(x)g(x)dx + Cu(x)$;

7. $y^{(n)} = f(x) \;\Rightarrow\; y(x) = \underbrace{\int dx\int dx...\int f(x)dx}_{n} + C_1 + C_2x + C_3x^2 + ... + C_nx^{n-1}$;

8. $f\left(x;y';...;y^{(n)}\right) = 0$ понизить на единицу заменой $y' = z(x) \Rightarrow$ $y'' = z'(x),..., y^{(n)} = z^{(n-1)} \Rightarrow f\left(x;z;z';...;z^{(n-1)}\right) = 0$.

Учебное издание

МАТЕМАТИКА

Сборник задач

Авторы:
Гаврилова Людмила Николаевна
Аглямова Зульфина Шамилевна
Митина Евгения Константиновна
Кожеманова Татьяна Николаевна

Главный редактор *Г. Я. Дарчинова*
Редактор *Т. В. Андреева*
Технический редактор *С. А. Каримова*
Дизайнер *Н. Е. Коняхина*

Подписано в печать 20.02.2019. Формат 60x84 1/16
Гарнитура Times NR, 10. Усл. печ. л. 9
Тираж 300 экз. Заказ № 90

ПОЗНАНИЕ

Издательство Казанского инновационного университета им. В. Г. Тимирясова (ИЭУП)
420111, г. Казань, ул. Московская, 42
Тел. (843) 231-92-90
E-mail: zaharova@ieml.ru

Отпечатано с готового оригинал-макета
в типографии ООО «ТЦО «Таглимат»:
420108, г. Казань, ул. Зайцева, 17